

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2$  を因数分解せよ。

(解答)

$A = a^2, B = b^2, C = c^2, D = d^2$  とおくと、

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD \\ &= A^2 + 2(B + C + D)A + B^2 + C^2 + D^2 + 2BC + 2BD + 2CD \\ &= (A + B + C + D)^2 - (B + C + D)^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2BC + 2BD + 2CD \\ &= (A + B + C + D)^2 - (B^2 + C^2 + D^2 + 2BC + 2BD + 2CD) + B^2 + C^2 + D^2 + 2BC + 2BD + 2CD \\ &= (A + B + C + D)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \end{aligned}$$

(別解)

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2$$

より

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$