関数 $f_n(x)\ (n=1,2,3,\cdots)$ を次のように定義する。

$$f_1(x)=2x^2-1,\ f_{n+1}(x)=2\{f_n(x)\}^2-1(n\geq 1)$$

（1） a を実数とするとき、$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
（2） a を実数とするとき、$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
（3） a を実数とするとき、$f_3(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
（4） a を実数とするとき、$f_n(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
（5） $f_n(x)=0$ を満たす実数 x を全て求めよ。

(解答)

（1） $f_1(x)=a$ を満たす x の個数は、
$y=f_1(x)$ と $y=a$ との交点を考えることによって
$a<-1$ のとき 0 個
$a=-1$ のとき 1 個
$a>-1$ のとき 2 個

（2） $f_2(x)=a$ を満たす x の個数は、
$a<-1$ のとき $f_1(f_1(x))=a$ を満たす $f_1(x)$ は存在しないので x の個数は 0 個
$a=-1$ のとき $f_1(f_1(x))=a$ を満たす $f_1(x)$ は $f_1(x)=0$ 、$f_1(x)=0$ を満たす x の個数は 2 個

$a>-1$ のとき $f_1(f_1(x))=a$ を満たす $f_1(x)=a$ の解を α,β とすると、$|\alpha|,|\beta|<1$ であるから、

α,β それぞれに対して、x の個数はそれぞれ 2 個であるから合わせて 4 個である。

（3） $f_3(x)=a$ を満たす x の個数は、
$a<-1$ のとき $f_1(f_2(x))=a$ を満たす $f_2(x)$ は存在しないので x の個数は 0 個
$a=-1$ のとき $f_1(f_2(x))=a$ を満たす $f_2(x)$ は $f_2(x)=0$ 、$f_2(x)=0$ を満たす x の個数は（2）の結果より 4 個

$a>-1$ のとき $f_1(f_2(x))=a$ を満たす $f_2(x)=a$ の解を α,β とすると、$|\alpha|,|\beta|<1$ であるから、

α,β それぞれに対して、$-1<f_1(x)<1$ の範囲に $f_1(x)$ の個数が 2 個あり、それぞれの $f_1(x)$ に対して x の個数は 2 個であるから合わせて 8 個である。

（4） $f_n(x)=a$ を満たす x の個数は、
（ⅰ） $a<-1$ のとき 0 個

（ⅱ） $a=-1$ のとき 2^{n-1} 個

（ⅲ） $a>-1$ のとき 2^n 個

であることを数学的帰納法で示す。
（ⅰ）について
（Ⅰ） $n=2$ のとき（2）より 0 個である。
（Ⅱ） $n=k$ のとき

「$f_k(x)=a$ を満たす x の個数が 0 個$\Rightarrow f_{k+1}(x)=a$ を満たす x の個数が 0 個」:（☆）
（☆）を示す。
$f_{k+1}(x)=f_1(f_k(x))=a$ を満たす実数 $f_k(x)$ の個数は 0 個であるので、$f_{k+1}(x)=a$ を満たす x の個数は 0 個である。よって、（☆）が成り立つ。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、$n\geq 2$ のとき $f_n(x)=a$ を満たす x の個数は 0 個である。

（ⅱ）について

（Ⅰ） $n=2$ のとき（2）より $2^{2-1}=2$ 個である。

（Ⅱ） $n=k$ のとき

「$f_k(x)=a$ を満たす x の個数が 2^{k-1} 個$\Rightarrow f_{k+1}(x)=a$ を満たす x の個数が 2^k 個」:（☆）　　　　　　（☆）を示す。

$f_{k+1}(x)=f_1(f_k(x))=a$ を満たす実数 $f_k(x)$ は $f_k(x)=0$ であり、

仮定より、$f_k(x)=0$ を満たす x の個数は 2^k 個である。

よって、（☆）が成り立つ。

（ⅲ）について

（Ⅰ） $n=2$ のとき（2）より 2^2 個である。

（Ⅱ） $n=k$ のとき

「$f_k(x)=a$ を満たす x の個数が 2^k 個$\Rightarrow f_{k+1}(x)=a$ を満たす x の個数が 2^{k+1} 個」:（☆）

（☆）を示す。

$f_{k+1}(x)=f_1(f_k(x))=a$ を満たす実数 $f_k(x)$ の個数は 2 個であり、それらはいずれも $|f_k(x)|<1$ を満たすので、仮定より、それぞれについて対応する x の個数は各 2^k 個あるので、$f_{k+1}(x)=a$ を満たす x の個数は 2^{k+1} 個である。

よって、（☆）が成り立つ。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、$n\geq 2$ のとき $f_n(x)=a$ を満たす x の個数は 2^n 個である。

よって、（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）より、
$f_n(x)=a$ を満たす x の個数は、
$a<-1$ のとき 0 個

$a=-1$ のとき 2^{n-1} 個

$a>-1$ のとき 2^n 個

（５） $x=\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$とおくと、

$$f_1(x)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

$$f_2(x)=2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$$

$$\vdots$$

$$f_n(x)=2\cos^2\left(2^{n-1}\theta\right)-1=\cos\left(2^n\theta\right)$$

$$f_n(x)=0\Leftrightarrow\cos\left(2^n\theta\right)=0$$

$\cos\left(2^n\theta\right)=0, 0\le 2^n\theta\le 2^n\pi$ より、$2^n\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},\cdots,\dfrac{\left(2\cdot 2^n-1\right)\pi}{2}$ であるから、

$$\theta=\frac{\pi}{2^{n+1}},\frac{3\pi}{2^{n+1}},\frac{5\pi}{2^{n+1}},\cdots,\frac{\left(2^{n+1}-1\right)\pi}{2^{n+1}}$$

よって、$x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right),\cos\left(\dfrac{3\pi}{2^{n+1}}\right),\cos\left(\dfrac{5\pi}{2^{n+1}}\right),\cdots,\cos\left\{\dfrac{\left(2^{n+1}-1\right)\pi}{2^{n+1}}\right\}$