$x$の関数$f(x)$を$f(x)=x^8-4x^7-64x^6-96x^5+188x^4+192x^3-256x^2+32x+16$で定義し、8次方程式$f(x)=0$について考える。

（1） $y=x-\dfrac{2}{x}$とおいて8次方程式$f(x)=0$を4次方程式$g(y)=0$の形で表すとき、$g(y)$を求めよ。

（2） $a,b,c$を正の実数とする。$g(y)=(y^2+ay+c)(y^2+by-c)$の形で表されるとき$a,b,c$の値をそれぞれ求めよ。

（3） 4次方程式$g(y)=0$の4つの解をすべて求めよ。

（4） 8次方程式$f(x)=0$の8つの解をすべて求めよ。

(解答)

（1） $y=x-\dfrac{2}{x}$より

$$y^2=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=x^2-4+\frac{4}{x^2}$$

$$y^3=\left(x-\frac{2}{x}\right)^3=x^3-6x+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^3}$$

$$y^4=\left(x-\frac{2}{x}\right)^4=x^4-8x^2+24-\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}$$

$f(0)=16$より$x=0$は$f(x)=0$の解ではないので、$f(x)=0$を$x^4$ $(x\neq 0)$で割ると、

$$\frac{f(x)}{x^4}=x^4-4x^3-64x^2-96x+188+\frac{192}{x}-\frac{256}{x^2}+\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^4}$$

$$=\left(x^4-8x^2+24-\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)-4x^3-56x^2-96x+164+\frac{192}{x}-\frac{224}{x^2}+\frac{32}{x^3}$$

$$=\left(x^4-8x^2+24-\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)-4\left(x^3-6x+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^3}\right)$$

$$-56x^2-120x+164+\frac{240}{x}-\frac{224}{x^2}$$

$$=\left(x^4-8x^2+24-\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)-4\left(x^3-6x+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^3}\right)-56\left(x^2-4+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$-120x-60+\frac{240}{x}$$

$$=\left(x^4-8x^2+24-\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)-4\left(x^3-6x+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^3}\right)-56\left(x^2-4+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$-120\left(x-\frac{2}{x}\right)-60$$

$$=y^4-4y^3-56y^2-120y-60$$

より $g(y)=y^4-4y^3-56y^2-120y-60$

（２）$g(y)=y^4-4y^3-56y^2-120y-60\cdots$①

$(y^2+ay+c)(y^2+by-c)=y^4-(a+b)y^3+aby^2-(a-b)cy-c^2\cdots$②

より①と②の係数を比較して

$\begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-56 \\ (a-b)c=120 \\ c^2=60 \end{cases}$　より $a=-2+2\sqrt{15}, b=-2-2\sqrt{15}, c=2\sqrt{15}$

（３）（２）より $g(y)=\{y^2-2(1-\sqrt{15})y+2\sqrt{15}\}\{y^2-2(1+\sqrt{15})y+2\sqrt{15}\}$であるから、

$y^2-2(1-\sqrt{15})y+2\sqrt{15}=0\cdots$③

$y^2-2(1+\sqrt{15})y-2\sqrt{15}=0\cdots$④

の解が $g(y)=0$ のすべての解になる。

③より

$$y=1-\sqrt{15}\pm\sqrt{(1-\sqrt{15})^2-2\sqrt{15}}$$

$$=1-\sqrt{15}\pm\sqrt{16-4\sqrt{15}}$$

$$=1-\sqrt{15}\pm\sqrt{2(8-2\sqrt{15})}$$

$$=1-\sqrt{15}\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}$$

$$=1-\sqrt{15}\pm(\sqrt{10}-\sqrt{6})$$

④より

$$y=1+\sqrt{15}\pm\sqrt{(1+\sqrt{15})^2+2\sqrt{15}}$$

$$=1+\sqrt{15}\pm\sqrt{16+4\sqrt{15}}$$

$$=1+\sqrt{15}\pm\sqrt{2\left(8+2\sqrt{15}\right)}$$

$$=1+\sqrt{15}\pm\sqrt{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=1+\sqrt{15}\pm\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)$$

よって、$g\left(y\right)=0$ の 4 つの解は、

$1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$

$1-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

$1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}$

$1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}$

（4）（ｉ）$x-\dfrac{2}{x}=1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$ のとき

$x^2-\left(1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)x-2=0$ より

$$x=\frac{1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)^2+8}}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\pm\sqrt{40+12\sqrt{6}+8\sqrt{10}+6\sqrt{15}}}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\pm\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)}{2}$$

（ⅱ）$x-\dfrac{2}{x}=1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$ のとき

$x^2-\left(1-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)x-2=0$ より

$$x=\frac{1-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}\pm\sqrt{\left(1-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)^2+8}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \sqrt{40-12\sqrt{6}-8\sqrt{10}+6\sqrt{15}}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15} \pm \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15} \pm \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)}{2}$$

（iii） $x-\dfrac{2}{x}=1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}$ のとき

$x^2-\left(1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)x-2=0$ より

$$x = \frac{1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \sqrt{\left(1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)^2+8}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \sqrt{40-12\sqrt{6}+8\sqrt{10}-6\sqrt{15}}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \sqrt{\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)}{2}$$

（iv） $x-\dfrac{2}{x}=1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}$ のとき

$x^2-\left(1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)x-2=0$ より

$$x = \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \sqrt{\left(1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)^2+8}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \sqrt{40+12\sqrt{6}-8\sqrt{10}-6\sqrt{15}}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \sqrt{\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15} \pm \left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{30}\right)}{2}$$

よって、$f(x)=0$ の8つの解は、

$$x=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}=\frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{30}}{2}=\frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{30}}{2}=\frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{30}}{2}=\frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{5})}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}=\frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{5})}{2}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}=\frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{5})}{2}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}=\frac{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{30}}{2}=\frac{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{5})}{2}$$

まとめると、

$$x=\frac{(1\pm\sqrt{2})(1\pm\sqrt{3})(1\pm\sqrt{5})}{2}$$ （複合任意）

（参考 1）

$\sqrt{40+12\sqrt{6}+8\sqrt{10}+6\sqrt{15}}$ の二重根号を外すには、$\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{15}$ が $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ の積から得られるので、$40+12\sqrt{6}+8\sqrt{10}+6\sqrt{15}=(p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{5})^2$ となるように $p,q,r,s$ の値を決めれば良い。

$(p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{5})^2$

$=p^2+2q^2+3r^2+5s^2+2pq\sqrt{2}+2pr\sqrt{3}+2ps\sqrt{5}+2qr\sqrt{6}+2qs\sqrt{10}+2rs\sqrt{15}$

より

$2pq\sqrt{2}+2pr\sqrt{3}+2ps\sqrt{5}=2p(q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{5})$ の部分が $\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{15}$ になるためには、

$p=t\sqrt{2\times3\times5}$ の形で表せなければならないので、

$(t\sqrt{2\times3\times5}+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{5})^2$

$=30t^2+2q^2+3r^2+5s^2+(2qr+10ts)\sqrt{6}+(2qs+6tr)\sqrt{10}+(2rs+4tq)\sqrt{15}$

定数項が$30t^2+2q^2+3r^2+5s^2 \geq 30\cdot 1^2+2\cdot 1^2+3\cdot 1^2+5\cdot 1^2=40$より

$(t,q,r,s)=(1,1,1,1)$とすると、

$\left(\sqrt{30}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=40+12\sqrt{6}+8\sqrt{10}+6\sqrt{15}$より

$\sqrt{40+12\sqrt{6}+8\sqrt{10}+6\sqrt{15}}=\sqrt{30}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

（参考 2）

$g(y)=0$の4つの解を

$y_1=1+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$

$y_2=1-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

$y_3=1-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}$

$y_4=1+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}$

とおくと、

$y_1=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-2$

$y_2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-2$

$y_3=\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-2$

$y_4=\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-2$

より

$y=z-2$としたものを$h(z)$とおくと、

$h(z)=(z-2)^4-4(z-2)^3-56(z-2)^2-120(z-2)-60$

$\quad =z^4-12z^3-8z^2+24z+4$

$h(z)=0$の解は、

$z_1=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$z_2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$z_3=\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$z_4=\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$z^4-12z^3-8z^2+24z+4=0$ より

$$\left(z-\frac{2}{z}\right)^2-12\left(z-\frac{2}{z}\right)-4=0$$

$t=z-\dfrac{2}{z}$ とおくと、

$$t^2-12t-4=0$$

$$t=6\pm2\sqrt{10}$$

$z-\dfrac{2}{z}=6+2\sqrt{10}$ のとき

$$z^2-2\left(3+\sqrt{10}\right)z-2=0$$

$$z=3+\sqrt{10}\pm\sqrt{\left(3+\sqrt{10}\right)^2+2}$$

$$=3+\sqrt{10}\pm\left(6+\sqrt{15}\right)$$

$$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

$z-\dfrac{2}{z}=6-2\sqrt{10}$ のとき

$$z^2-2\left(3-\sqrt{10}\right)z-2=0$$

$$z=3-\sqrt{10}\pm\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2+2}$$

$$=3-\sqrt{10}\pm\left(6-\sqrt{15}\right)$$

$$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

よって、

$$z = \left(\sqrt{3} \pm \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)$$ （複合任意）

$$= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}}{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}$$ （複合任意）