xを実数とし、$f(x)=8x^3-6x-1$で定義する。

（1） $f(x)=0$が$-1\leq x\leq 1$の範囲に異なる3つの実数解を持つことを示せ。
（2） $f(x)=0, g(x)=0$の方程式の解を$x=\cos\theta\ (0\leq\theta\leq\pi)$とおくとき、$\theta$の値をそれぞれ求めよ。

（3） $f(x)=0$の解をそれぞれa,b,cとおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^k+b^k+c^k\right)$を求めよ。

（解答）

（1） $f(x)=8x^3-6x-1$とすると、$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$のとき$x=\pm\dfrac{1}{2}$より増減表を作成すると、

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-3	$\uparrow$	1	$\downarrow$	-3	$\uparrow$	1

より、$y=f(x)$は$-1\leq x\leq 1$の範囲において、x軸と異なる3つの共有点を持つので
$f(x)=0$が$-1\leq x\leq 1$の範囲に異なる3つの実数解を持つ。

（2） $x=\cos\theta$とおくと、$f(\cos\theta)=8\cos^3\theta-6\cos\theta-1=0$

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$より$\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leq\theta\leq\pi\Leftrightarrow 0\leq 3\theta\leq 3\pi$より

$\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$のとき$3\theta=\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5}{3}\pi,\dfrac{7}{3}\pi$より、$\theta=\dfrac{\pi}{9},\dfrac{5}{9}\pi,\dfrac{7}{9}\pi$

（3）（2）より$\theta\neq 0,\pi$より、$x=\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$とおくと、$-1<a<1,-1<b<1,-1<c<1$

より$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^k+b^k+c^k\right)=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}$

解と係数との関係より、$a+b+c=0, ab+bc+ca=-\dfrac{3}{4}, abc=\dfrac{1}{8}$

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=\frac{a(1-b)(1-c)+b(1-c)(1-a)+c(1-a)(1-b)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$=\frac{a+b+c-2(ab+bc+ca)+3abc}{1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc}$$

$$=\frac{0-2\left(-\frac{3}{4}\right)+3\cdot\frac{1}{8}}{1-0-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}$$

$$=15$$