２つ以上の変数を持つ関数に対して、どの２つの変数を入れ替えても元の式と同じになるものを対称式という。また、２つ以上の変数を持つ関数に対して、どの２つの変数を入れ替えても元の式の-1倍になるものを対称式という。

（１）３変数関数に対して、次の（ⅰ）～（ⅲ）を証明せよ。

（ⅰ）（対称式）＝（対称式）×（対称式）

（ⅱ）（交代式）＝（対称式）×（交代式）

（ⅲ）（対称式）＝（交代式）×（交代式）

（２）交代式$f(x,y,z)$は、対称式$g(x,y,z)$を用いて、$(x-y)(y-z)(z-x)\times g(x,y,z)$の形で表せることを示せ。

（３）$f_n(a,b,c)=a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$で定義する。

（ⅰ）$f_2(a,b,c)$を因数分解せよ。

（ⅱ）$f_3(a,b,c)$を因数分解せよ。

（ⅲ）$f_4(a,b,c)$を因数分解せよ。

（ⅳ）$f_5(a,b,c)$を因数分解せよ。

（解答）

（１）

（ⅰ）$f(x,y,z), g(x,y,z)$を対称式とすると、対称式の定義より、

$f(x,y,z)=f(y,x,z)=f(x,z,y)=f(z,y,x)$

$g(x,y,z)=g(y,x,z)=g(x,z,y)=g(z,y,x)$

が成り立つ。

$h(x,y,z)=f(x,y,z)\times g(x,y,z)$とおくと、

$h(y,x,z)=f(y,x,z)\times g(y,x,z)=f(x,y,z)\times g(x,y,z)=h(x,y,z)$

$h(x,z,y)=f(x,z,y)\times g(x,z,y)=f(x,y,z)\times g(x,y,z)=h(x,y,z)$

$h(z,y,x)=f(z,y,x)\times g(z,y,x)=f(x,y,z)\times g(x,y,z)=h(x,y,z)$

より、$h(x,y,z)=h(y,x,z)=h(x,z,y)=h(z,y,x)$

であるから、$h(x,y,z)$は対称式である。

（ⅱ）$f(x,y,z)$を対称式、$g(x,y,z)$を交代式とすると、対称式と交代式の定義より、

$f(x,y,z)=f(y,x,z)=f(x,z,y)=f(z,y,x)$

$g(x,y,z)=-g(y,x,z)=-g(x,z,y)=-g(z,y,x)$

が成り立つ。

$h(x,y,z)=f(x,y,z)\times g(x,y,z)$とおくと、

$h(y,x,z)=f(y,x,z)\times g(y,x,z)=f(x,y,z)\times\{-g(x,y,z)\}=-h(x,y,z)$

$h(x,z,y)=f(x,z,y)\times g(x,z,y)=f(x,y,z)\times\{-g(x,y,z)\}=-h(x,y,z)$

$h(z,y,x)=f(z,y,x)\times g(z,y,x)=f(x,y,z)\times\{-g(x,y,z)\}=-h(x,y,z)$

より、$h(x,y,z)=-h(y,x,z)=-h(x,z,y)=-h(z,y,x)$

であるから、$h(x,y,z)$は交代式である。

（ⅲ）$f(x,y,z), g(x,y,z)$を交代式とすると、交代式の定義より、

$f(x,y,z)=-f(y,x,z)=-f(x,z,y)=-f(z,y,x)$
$g(x,y,z)=-g(y,x,z)=-g(x,z,y)=-g(z,y,x)$
が成り立つ。
$h(x,y,z)=f(x,y,z)\times g(x,y,z)$とおくと、
$h(y,x,z)=f(y,x,z)\times g(y,x,z)=-f(x,y,z)\times\{-g(x,y,z)\}=h(x,y,z)$
$h(x,z,y)=f(x,z,y)\times g(x,z,y)=-f(x,y,z)\times\{-g(x,y,z)\}=h(x,y,z)$
$h(z,y,x)=f(z,y,x)\times g(z,y,x)=-f(x,y,z)\times\{-g(x,y,z)\}=h(x,y,z)$
より、$h(x,y,z)=h(y,x,z)=h(x,z,y)=h(z,y,x)$
であるから、$h(x,y,z)$は対称式である。

（２） $f(x,y,z)=-f(y,x,z)$より、$f(x,y,z)+f(y,x,z)=0$
$y=x$とすると、$f(y,y,z)+f(y,y,z)=0$より、$f(y,y,z)=0$
$f(x,y,z)$において、$y=x$とすると必ず0になるので、$f(x,y,z)=0$は$y=x$を解に持つことになるので、因数定理より、$f(x,y,z)$は常に$(x-y)$を因数に持つ。同様に$y=z, z=x$としても同様に$(y-z), (z-x)$の因数を常に持つ。
$h(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)$とおくと、$h(x,y,z)=-h(y,x,z)=-h(x,z,y)=-h(z,y,x)$より
$(x-y)(y-z)(z-x)$は交代式であるので、（１）（ⅱ）より、
$h(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)\times$（対称式）で表すことができる。
よって、$f(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)\times g(x,y,z)$が成り立つ。

（３） $f_n(a,b,c)=a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$より、

$$f_n(b,a,c)=b^n(a-c)+a^n(c-b)+c^n(b-a)$$
$$=-\{a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)\}$$
$$=-f_n(a,b,c)$$

$$f_n(a,c,b)=a^n(c-b)+c^n(c-b)+b^n(a-c)$$
$$=-\{a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)\}$$
$$=-f_n(a,b,c)$$

$$f_n(c,b,a)=c^n(b-a)+b^n(a-c)+a^n(a-c)$$
$$=-\{a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)\}$$
$$=-f_n(a,b,c)$$

よって、$f_n(a,b,c)$は交代式であるので、$(a-b)(b-c)(c-a)$を因数に持つ。

（ｉ） $f_2(a,b,c)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$は$3$次式であり、$(a-b)(b-c)(c-a)$で割った商は

定数になるので、$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a)$とおける。

$a=2, b=1, c=0$とすると、

$2^2(1-0)+1^2(0-2)+0^2(2-1)=A(2-1)(1-0)(0-2)$より$A=-1$

よって、$f_2(a,b,c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

（ⅱ）$f_3(a,b,c)=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$は4次式であり、$(a-b)(b-c)(c-a)$で割った商は

1次の対称式$a+b+c$となるから、

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=A(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$とおける。

$a=2, b=1, c=0$とすると、

$2^3(1-0)+1^3(0-2)+0^3(2-1)=A(2-1)(1-0)(0-2)(2+1+0)$より$A=-1$

よって、$f_3(a,b,c)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

（ⅲ）$f_4(a,b,c)=a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$は5次式であり、$(a-b)(b-c)(c-a)$で割った商は

2次の対称式となるから、

$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)\{A(a^2+b^2+c^2)+B(ab+bc+ca)\}$

とおける。

$a=2, b=1, c=0$とすると、

$2^4(1-0)+1^4(0-2)+0^4(2-1)=(2-1)(1-0)(0-2)\{A(2^2+1^2+0^2)+B(2\cdot1+1\cdot0+0\cdot2)\}$

より$5A+2B=-7$

$a=1, b=0, c=-1$とすると、

$1^4(0+1)+0^4(-1-1)+(-1)^4(1-0)$

$=(1-0)(0+1)(-1-1)\left[A\{1^2+0^2+(-1)^2\}+B(1\cdot0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot1)\right]$

より$2A-B=-1$

よって、$A=B=-1$

ゆえに、$f_4(a,b,c)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

（ⅳ）$f_5(a,b,c)=a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$は6次式であり、$(a-b)(b-c)(c-a)$で割った商は

3次の対称式となるから、

$a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)\left\{A\left(a^3+b^3+c^3\right)+B\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\right)+Cabc\right\}$$

とおける。

a^5b の係数を比較して、$-A=1$

a^4b^2 の係数を比較して、$A-B=0$

a^3b^2c の係数を比較して、$-A+B+B-C=0$

よって、$A=B=C=-1$

ゆえに、

$$f_5(a,b,c)=-(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+abc\right)$$