$a,b,c,d$ を正の実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^8-ax^7+bx^6-cx^5+dx^4-cx^3+bx^2-ax+1$$

で定義する。

（1） $k$ を実数とし、$f(x)$ が $x-k$ で割り切れるとする。このとき $k>0$ であり、$f(x)$ は $(x-k)\left(x-\dfrac{1}{k}\right)$ で割り切れることを示せ。

（2） $f(x)$ が実数 $p,q,r,s,t,u,v,w$ を用いて

$$f(x)=(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)(x-w)$$

と因数分解できるとき、$a\geq {}_8C_1, b\geq {}_8C_2, c\geq {}_8C_3, d\geq {}_8C_4$ が成り立つことを示せ。

（3） $a=8$ とする。$f(x)$ が実数 $p,q,r,s,t,u$ を用いて

$$f(x)=(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)(x-w)$$

と因数分解できるような自然数 $(b,c,d)$ の組をすべて求めよ。

(解答)

（1） $f(x)$ が $x-k$ で割り切れるので

$$f(k)=k^8-ak^7+bk^6-ck^5+dk^4-ck^3+bk^2-ak+1=0\cdots①$$

が成り立つ。

$k=0$ のとき $f(0)=1\neq 0$ より①が成り立たない。

$k<0$ のとき $f(k)=k^8-ak^7+bk^6-ck^5+dk^4-ck^3+bk^2-ak+1>0$ より①が成り立たない。

よって、①が成立するのは $k>0$ のときである。①が成り立つので

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\left(\frac{1}{k}\right)^8-a\left(\frac{1}{k}\right)^7+b\left(\frac{1}{k}\right)^6-c\left(\frac{1}{k}\right)^5+d\left(\frac{1}{k}\right)^4-c\left(\frac{1}{k}\right)^3+b\left(\frac{1}{k}\right)^2-a\left(\frac{1}{k}\right)+1$$

$$=\left(\frac{1}{k}\right)^8\left(k^8-ak^7+bk^6-ck^5+dk^4-ck^3+bk^2-ak+1\right)=0\cdots②$$

が成り立つ。

（ⅰ） $k\neq 1$ のとき

$k\neq\dfrac{1}{k}$ より $f(x)$ は $(x-k)\left(x-\dfrac{1}{k}\right)$ で割り切れる。

（ⅱ） $k=1$ のとき

①より $f(1)=1-a+b-c+d-c+b-a+1=0$ であるから

$d=2(a-b+c-1)$ となり、

$$f(x)=x^8-ax^7+bx^6-cx^5+2(a-b-1)x^4-cx^3+bx^2-ax+1$$

より、

$$f'(x)=8x^7-7ax^6+6bx^5-5cx^4+8(a-b-1)x^3-3cx^2+2bx-a$$

$$f'(1)=8-7a+6b-5c+8(a-b-1)-3c+2b-a=0$$

より、$f(x)=0$ は $x=1$ で重解を持つので、

この場合も $f(x)$ は $(x-k)\left(x-\dfrac{1}{k}\right)$ で割り切れる。

（２）（１）より、$p>0,q>0,r>0,s>0$ とすると、$f(x)$ の定数項が$1$であるので、

$$t=\frac{1}{p},u=\frac{1}{q},v=\frac{1}{r},w=\frac{1}{s}$$

とおくことができる。

$$x^8-ax^7+bx^6-cx^5+dx^4-cx^3+bx^2-ax+1$$

$$=(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)\left(x-\frac{1}{p}\right)\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(x-\frac{1}{r}\right)\left(x-\frac{1}{s}\right)\cdots③$$

より、$x^7$ および $x$ の係数を比較すると、$-a=-p-q-r-s-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{s}$ であるから、

$$a=p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}+r+\frac{1}{r}+s+\frac{1}{s}\cdots④$$

③の $x^6$ および $x^2$ の係数を比較すると、

$$b=pq+pr+ps+1+\frac{p}{q}+\frac{p}{r}+\frac{p}{s}+qr+qs+\frac{q}{p}+1+\frac{q}{r}+\frac{q}{s}+rs+\frac{r}{p}+\frac{r}{q}+1$$

$$+\frac{r}{s}+\frac{s}{p}+\frac{s}{q}+\frac{s}{r}+1+\frac{1}{pq}+\frac{1}{pr}+\frac{1}{ps}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{qs}+\frac{1}{rs}$$

$$=pq+\frac{q}{p}+\frac{p}{q}+\frac{1}{pq}+pr+\frac{p}{r}+\frac{r}{p}+\frac{1}{pr}+ps+\frac{p}{s}+\frac{s}{p}+\frac{1}{ps}+qr+\frac{q}{r}+\frac{r}{q}+\frac{1}{qr}$$

$$+qs+\frac{q}{s}+\frac{s}{q}+\frac{1}{qs}+rs+\frac{r}{s}+\frac{s}{r}+\frac{1}{rs}+4$$

$$=\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)+\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)+\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)$$

$$+\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+4\cdots⑤$$

③の $x^5$ および $x^3$ の係数を比較すると、

$$-c=-pqr-pqs-q-p-\frac{pq}{r}-\frac{pq}{s}-prs-r-\frac{pr}{q}-p-\frac{pr}{s}-s-\frac{ps}{q}-\frac{ps}{r}-p$$

$$-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-\frac{p}{qr}-\frac{p}{qs}-\frac{p}{rs}-qrs-\frac{qr}{p}-r-q-\frac{qr}{s}-\frac{qs}{p}-s-\frac{qs}{r}-q-\frac{1}{p}-\frac{q}{pr}$$

$$-\frac{q}{ps}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-\frac{q}{rs}-\frac{rs}{p}-\frac{rs}{q}-s-r-\frac{r}{pq}-\frac{1}{p}-\frac{r}{ps}-\frac{1}{q}-\frac{r}{qs}-\frac{1}{s}-\frac{s}{pq}-\frac{s}{pr}$$

$$-\frac{1}{p}-\frac{s}{qr}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{pqr}-\frac{1}{pqs}-\frac{1}{prs}-\frac{1}{qrs}$$

$$c = pqr+\frac{qr}{p}+\frac{pr}{q}+\frac{pq}{r}+\frac{p}{qr}+\frac{q}{pr}+\frac{r}{pq}+\frac{1}{pqr}$$

$$+pqs+\frac{qs}{p}+\frac{ps}{q}+\frac{pq}{s}+\frac{p}{qs}+\frac{q}{ps}+\frac{s}{pq}+\frac{1}{pqs}$$

$$+prs+\frac{rs}{p}+\frac{ps}{s}+\frac{pr}{s}+\frac{p}{rs}+\frac{r}{ps}+\frac{s}{pr}+\frac{1}{prs}$$

$$+qrs+\frac{rs}{q}+\frac{qs}{s}+\frac{qr}{s}+\frac{q}{rs}+\frac{r}{qs}+\frac{s}{qr}+\frac{1}{qrs}$$

$$+3p+\frac{3}{p}+3q+\frac{3}{q}+3r+\frac{3}{r}+3s+\frac{3}{s}$$

$$=\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)+\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

$$+\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+3\left\{\left(p+\frac{1}{p}\right)+\left(q+\frac{1}{q}\right)+\left(r+\frac{1}{r}\right)+\left(s+\frac{1}{s}\right)\right\}\cdots⑥$$

③の $x^4$ の係数を比較すると、

$$d = pqrs+qr+pr+pq+\frac{pqr}{s}+qs+ps+\frac{pqs}{r}+pq+1+\frac{q}{r}+\frac{q}{s}+\frac{p}{r}+\frac{p}{s}+\frac{pq}{rs}$$

$$+rs+\frac{prs}{q}+ps+pr+\frac{r}{q}+1+\frac{r}{s}+\frac{p}{q}+\frac{pr}{qs}+\frac{p}{s}+\frac{s}{q}+\frac{s}{r}+1$$

$$+\frac{ps}{qr}+\frac{p}{q}+\frac{p}{r}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{qs}+\frac{1}{rs}+\frac{p}{qrs}$$

$$+\frac{qrs}{p}+rs+qs+qr+\frac{r}{p}+\frac{q}{p}+\frac{qr}{ps}+1+\frac{r}{s}+\frac{q}{s}$$

$$+\frac{s}{p}+\frac{qs}{pr}+\frac{q}{p}+\frac{s}{r}+1+\frac{q}{r}+\frac{1}{pr}+\frac{1}{ps}+\frac{qs}{pr}+\frac{1}{rs}$$

$$+\frac{rs}{pq}+\frac{s}{p}+\frac{r}{p}+\frac{s}{q}+\frac{r}{q}+1+\frac{1}{pq}+\frac{r}{pqs}+\frac{1}{ps}+\frac{1}{qs}$$

$$+\frac{s}{pqr}+\frac{1}{pq}+\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{pqrs}$$

$$=\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

$$+2\left\{\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)+\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)+\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)\right.$$

$$\left.+\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)\right\}+6\cdots⑦$$

相加相乗平均より、

$$p+\frac{1}{p}\geq 2\sqrt{p\cdot\frac{1}{p}}=2,q+\frac{1}{q}\geq 2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}=2,r+\frac{1}{r}\geq 2\sqrt{r\cdot\frac{1}{r}}=2,s+\frac{1}{s}\geq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}=2$$

等号成立は $p=\frac{1}{p},q=\frac{1}{q},r=\frac{1}{r},s=\frac{1}{s}$ のときであるので $p=q=r=s=1$ のときである。

④,⑤,⑥,⑦より、

$a\geq 2+2+2+2=8={}_8C_1$

$b\geq 2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2+4=28={}_8C_2$

$c\geq 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2+3(2+2+2+2)=56={}_8C_3$

$d\geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2(2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2)+6=70={}_8C_4$

（３）$a=8$ のとき④より $p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}+r+\frac{1}{r}+s+\frac{1}{s}=8\cdots⑧$ となり、

（１）より $p=q=r=s=1$ となり、

$$f(x)=(x-1)^8=x^8-8x^7+28x^6-56x^5+70x^4-56x^3+28x^2-8x+1$$

より、$(b,c,d)=(28,56,70)$