xに関する5次方程式$x^5+ax^4+bx^3+bx^2+ax+1=0$…①について考える。

（１）①は$x=-1$を解に持つことを示せ。

（２）①が異なる5つの実数解を持つためのa,bの条件を求めよ。

（３）①の解を全て求めよ。

(解答)

（１） $x=-1$のときに左辺は0になるので左辺は$x+1$を因数に持つことが分かる。

（２）$x^5+ax^4+bx^3+bx^2+ax+1=(x+1)\{x^4+(a-1)x^3+(b-a+1)x^2+(a-1)x+1\}$であり、

$x^4+(a-1)x^3+(b-a+1)x^2+(a-1)x+1=0$…②について考える。

②は$x=0$を解に持たないので両辺をx^2で割ると

$$x^2+(a-1)x+(b-a+1)+\frac{a-1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \cdots ②’$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$とおくと、$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$

②’に代入して整理すると、

$$t^2+(a-1)t+(b-a-1)=0$$

$$t=\frac{-(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-4(b-a-1)}}{2}=\frac{-(a-1)\pm\sqrt{a^2+6a-4b+5}}{2}$$

$\alpha=\dfrac{-(a-1)-\sqrt{a^2+6a-4b+5}}{2},\beta=\dfrac{-(a-1)+\sqrt{a^2+6a-4b+5}}{2}$とおくと、

$$x+\frac{1}{x}=\alpha,\beta$$

$$x+\frac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0 \cdots ③$$

$$x+\frac{1}{x}=\beta \Leftrightarrow x^2-\beta x+1=0 \cdots ④$$

③より、$x=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$…⑤

④より、$x=\dfrac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4}}{2}$ …⑥

⑤より、$x=\dfrac{-(a-1)-\sqrt{a^2+6a-4b+5}\pm\sqrt{\left\{-(a-1)-\sqrt{a^2+6a-4b+5}\right\}^2-16}}{4}$ …⑦

⑥より、$x=\dfrac{-(a-1)+\sqrt{a^2+6a-4b+5}\pm\sqrt{\left\{-(a-1)+\sqrt{a^2+6a-4b+5}\right\}^2-16}}{4}$ …⑧

①が異なる5つの実数解を持つための条件は、

⑦より、$\left\{-(a-1)-\sqrt{a^2+6a-4b+5}\right\}^2-16>0$

⑧より、$\left\{-(a-1)+\sqrt{a^2+6a-4b+5}\right\}^2-16>0$

かつ

$$-(a-1)-\sqrt{a^2+6a-4b+5}\pm\sqrt{\left\{-(a-1)-\sqrt{a^2+6a-4b+5}\right\}^2-16}\neq-4$$

かつ

$$-(a-1)+\sqrt{a^2+6a-4b+5}\pm\sqrt{\left\{-(a-1)+\sqrt{a^2+6a-4b+5}\right\}^2-16}\neq-4$$

かつ

$a^2+6a-4b+5>0$

（３）（２）の⑦と⑧と $x=-1$ が答えである。