a,bを正の定数とするとき、xに関する方程式

$$\left(x^2+ax+b\right)^2+a\left(x^2+ax+b\right)+b=x \cdots \text{（A）}$$

について考える。

（１）（A）が異なる４つの実数解を持つようなa,bの条件を求めよ。

（２）a,bが（１）で求めた条件を持たすとき、（A）のすべての実数解を求めよ。

（解答）

（１）$t=x^2+ax+b \cdots$①とおくと、（A）$\Leftrightarrow x=t^2+at+b \cdots$②より

①－②より$t-x=x^2-t^2+a(x-t) \Leftrightarrow (t+x+a+1)(t-x)=0$

$t=-x-a-1$のとき

①より$-x-a-1=x^2+ax+b$となり、$x=\dfrac{-a-1\pm\sqrt{(a+1)(a-3)-4b}}{2} \cdots$③

$t=x$のとき

①より$x=x^2+ax+b$となり、$x=\dfrac{-a+1\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \cdots$④

③より

$$x_1=\frac{-a-1+\sqrt{(a+1)(a-3)-4b}}{2},\ x_2=\frac{-a-1-\sqrt{(a+1)(a-3)-4b}}{2}$$

$$x_3=\frac{-a+1+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2},\ x_4=\frac{-a+1-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$$

とすると、

③,④より（A）が異なる４つの実数解を持つようなa,bの条件は、

$(a+1)(a-3)-4b>0$かつ$(a-1)^2-4b>0$かつ$x_1\neq x_2$かつ$x_3\neq x_4$かつ$x_1\neq x_3$かつ

$x_1\neq x_4$かつ$x_2\neq x_3$かつ$x_2\neq x_4$

$(a+1)(a-3)-4b>0$より$b<\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}$

$(a-1)^2-4b>0$より$b<\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}$

$x_1\neq x_2$より$b\neq\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}$

$x_3\neq x_4$より$b\neq\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}$

$x_1\neq x_3$は常に成り立つ。

$x_1 \neq x_4$ より $b \neq \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}$

$x_2 \neq x_3$ は常に成り立つ。

$x_2 \neq x_4$ より $b \neq \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$

$b < \frac{1}{4}(a+1)(a-3)$ かつ $b < \frac{1}{4}(a-1)^2$ かつ $b \neq \frac{1}{4}(a+1)(a-3)$ かつ $b \neq \frac{1}{4}(a-1)^2$

よりまとめると、

$b < \frac{1}{4}(a+1)(a-3)$

（２） $x_1 = \dfrac{-a-1+\sqrt{(a+1)(a-3)-4b}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-a-1-\sqrt{(a+1)(a-3)-4b}}{2}$

$x_3 = \dfrac{-a+1+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-a+1-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$