

$(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 11x + 30} = 1$  を満たす実数  $x$  をすべて求めよ。

(解答)

$a^b = 1$  を満たす  $a, b$  の組み合わせは、

- (i)  $a = 1, b$  が実数のとき
- (ii)  $a \neq 0, b = 0$  のとき
- (iii)  $a = -1, b = 2k$  ( $k$ : 整数) のとき
- (i) のとき

$x^2 - 5x + 5 = 1$  より  $(x-1)(x-4) = 0$  となるから、 $x = 1, 4$

$x = 1$  のとき  $x^2 - 11x + 30 = 1^2 - 11 \cdot 1 + 30 = 20$  (実数)

$x = 4$  のとき  $x^2 - 11x + 30 = 4^2 - 11 \cdot 4 + 30 = 2$  (実数)

より  $x = 1, 4$  が解である。

(ii) のとき

$x^2 - 11x + 30 = 0$  より  $(x-5)(x-6) = 0$  となるから、 $x = 5, 6$

$x = 5$  のとき  $x^2 - 5x + 5 = 5^2 - 5 \cdot 5 + 5 = 5 \neq 0$

$x = 6$  のとき  $x^2 - 5x + 5 = 6^2 - 5 \cdot 6 + 5 = 11 \neq 0$

より  $x = 5, 6$  が解である。

(iii) のとき

$x^2 - 5x + 5 = -1$  より  $(x-2)(x-3) = 0$  となるから、 $x = 2, 3$

$x = 2$  のとき  $x^2 - 11x + 30 = 2^2 - 11 \cdot 2 + 30 = 12 = 2k$  ( $k = 6$ )

$x = 3$  のとき  $x^2 - 11x + 30 = 3^2 - 11 \cdot 3 + 30 = 6 = 2k$  ( $k = 3$ )

より  $x = 2, 3$  が解である。

以上、(i) (ii) (iii) より、 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  が解である。