Dを平方数でない自然数とする。$x^2-Dy^2=1$…①を満たす自然数解(x,y)について考える。

（１）$(x,y)=(a,b)$とすると、自然数nに対して、$\left(a+b\sqrt{D}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{D}$で求まる$(a_n,b_n)$は、①の解であることを示せ。

（２）①を満たす自然数解のうちの２組を$(x,y)=(a,b),(c,d)$とすると、$\dfrac{c+d\sqrt{D}}{a+b\sqrt{D}}=A+B\sqrt{D}$を満たす$(A,B)$は、①の解であることを示せ。

（３）①を満たす自然数解のうち、$x+y\sqrt{D}$の値を最小にするものを$(x,y)=(p,q)$とすると、$\left(p+q\sqrt{D}\right)^n=p_n+q_n\sqrt{D}$を満たす$(p_n,q_n)$は、①の解の全てであることを示せ。

(解答)

（１）題意を数学的帰納法で示す。

（Ⅰ）$n=1$のとき

$\left(a+b\sqrt{D}\right)^1=a+b\sqrt{D}=1$より明らかに成り立つ。

（Ⅱ）$n=k$のとき

「$\left(a+b\sqrt{D}\right)^k=a_k+b_k\sqrt{D}$で求まる$(a_k,b_k)$が①の解であれば、

$\left(a+b\sqrt{D}\right)^{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{D}$で求まる$(a_{k+1},b_{k+1})$が①の解である」・・・(＊)

（＊）を示す。

$$\left(a+b\sqrt{D}\right)^{k+1}=\left(a_k+b_k\sqrt{D}\right)\left(a+b\sqrt{D}\right)$$
$$=a_ka+b_kbD+(a_kb+b_ka)\sqrt{D}$$

$$(a_ka+b_kbD)^2-(a_kb+b_ka)^2=a^2\left(a_k{}^2-Db_k{}^2\right)-Db^2\left(a_k{}^2-Db_k{}^2\right)$$
$$=a^2-Db^2$$
$$=1$$

よって、（＊）が示された。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、題意は示された。

（２）$$\frac{c+d\sqrt{D}}{a+b\sqrt{D}}=\frac{\left(c+d\sqrt{D}\right)\left(a-b\sqrt{D}\right)}{\left(a+b\sqrt{D}\right)\left(a-b\sqrt{D}\right)}=\frac{\left(c+d\sqrt{D}\right)\left(a-b\sqrt{D}\right)}{a^2-b^2D}=(ac-bdD)+(ad-bc)\sqrt{D}$$

$$A^2-B^2=(ac-bdD)^2-(ad-bc)^2D$$

$$=a^2\left(c^2-d^2D\right)-b^2\left(c^2-d^2D\right)D$$

$$=a^2-b^2D$$

$$=1$$

よって題意は示された。

（３）（１）より、$\left(p_n,q_n\right)$は、①の解であることは明らかである。

①を満たす任意の解を$\left(x,y\right)=\left(s,t\right)$とすると、ある自然数$n$について、

$$\left(p+q\sqrt{D}\right)^n\leq s+t\sqrt{D}\leq\left(p+q\sqrt{D}\right)^{n+1}$$

が成り立つ。全辺を$\left(p+q\sqrt{D}\right)^n$で割ると

$$1\leq\frac{s+t\sqrt{D}}{\left(p+q\sqrt{D}\right)^n}\leq p+q\sqrt{D}$$

$p+q\sqrt{D}$は最小であるので、（２）より、$p+q\sqrt{D}=1$

よって、$\dfrac{s+t\sqrt{D}}{\left(p+q\sqrt{D}\right)^n}=1\Leftrightarrow s+t\sqrt{D}=\left(p+q\sqrt{D}\right)^n$

よって、題意は示された。