$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4n+1}} < \prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2n+1}}$ が成り立つことを示せ。

ただし、$\prod_{i=1}^{n} p_i = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ を表すものとする。

（解答）

$(2i-1)(2i+1) = 4i^2 - 1 < 4i^2 = (2i)^2$ より、

$$\frac{2i-1}{2i} < \frac{2i-1}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} = \sqrt{\frac{2i-1}{2i+1}}$$

$(4i-1)(4i+1) = 16i^2 - 1 < 16i^2 = 4(2i)^2$ より、

$$\frac{2i-1}{2i} = \sqrt{\frac{(2i-1)^2}{(2i)^2}} = \sqrt{1-\frac{4i-1}{(2i)^2}} = \sqrt{1-\frac{4(4i-1)}{4(2i)^2}} > \sqrt{1-\frac{4(4i-1)}{(4i-1)(4i+1)}} > \sqrt{1-\frac{4}{4i+1}} > \sqrt{\frac{4i-3}{4i+1}}$$

すなわち

$$\sqrt{\frac{4i-3}{4i+1}} < \frac{2i-1}{2i} < \sqrt{\frac{2i-1}{2i+1}}$$

$k = 2,3,\cdots,n$ としたものをかけて

$$\sqrt{\frac{5}{4n+1}} < \prod_{i=2}^{n}\frac{2i-1}{2i} < \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$$

よって、$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4n+1}} < \prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2n+1}}$