$\log_2 3, \log_3 2, \log_2(\log_2 3), \log_2(\log_3 2), \log_3(\log_2 3), \log_3(\log_3 2)$の6つの値の大小を比較せよ。

（解答）

対数の底cが1より大きい場合、$0<a<b$のとき$\log_c a < \log_c b$が成り立つ。

・$\log_2 3$

$\log_2 3 > \log_2 2 = 1$

・$\log_3 2$

$0 = \log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3 = 1$

・$\log_2(\log_2 3)$

$0 = \log_2 1 = \log_2(\log_2 2) < \log_2(\log_2 3) < \log_2(\log_2 4) = \log_2 2 = 1$

・$\log_2(\log_3 2)$

$\log_2(\log_3 2) < \log_2(\log_3 3) = \log_2 1 = 0$

・$\log_3(\log_2 3)$

$0 = \log_3 1 = \log_3(\log_2 2) < \log_3(\log_2 3) < \log_3(\log_2 2^3) = \log_3(\log_2 8) = \log_3 3 = 1$

・$\log_3(\log_3 2)$

$\log_3(\log_3 2) < \log_3(\log_3 3) = \log_3 1 = 0$

より以下の3つのグループに分けることができる。

（ⅰ）値が1より大きいもの

$\log_2 3$

（ⅱ）値が0より小さいもの

$\log_2(\log_3 2), \log_3(\log_3 2)$

$$\log_2(\log_3 2) - \log_3(\log_3 2) = \frac{\log_{\log_3 2}\log_3 2}{\log_{\log_3 2} 2} - \frac{\log_{\log_3 2}\log_3 2}{\log_{\log_3 2} 3} = \frac{1}{\log_{\log_3 2} 2} - \frac{1}{\log_{\log_3 2} 3}$$

$0 < \log_3 2 < 1$より$\log_{\log_3 2} 2 > \log_{\log_3 2} 3$であるから、$\dfrac{1}{\log_{\log_3 2} 2} - \dfrac{1}{\log_{\log_3 2} 3} < 0$

よって、$\log_2(\log_3 2) < \log_3(\log_3 2)$

（ⅲ）値が0より大きく1より小さいもの

$\log_3 2, \log_2(\log_2 3), \log_3(\log_2 3)$

・$\log_3 2$

$$\frac{1}{2} = \log_3\sqrt{3} < \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$$

・$\log_2(\log_2 3)$

$$\log_2(\log_2 3) > \log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

・$\log_3(\log_2 3)$

$\left(2^{\sqrt{3}}\right)^3 > \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^3 = 2^5 = 32,\ 3^3 = 27$ より $2^{\sqrt{3}} > 3$ となり、$\sqrt{3} > \log_2 3$ であるので、

$\log_3(\log_2 3) < \log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$

よって、$\log_3(\log_2 3) < \dfrac{1}{2} < \log_3 2, \log_2(\log_2 3)$ が成り立つ。

・$\log_3 2$ と $\log_2(\log_2 3)$ の大小比較

$\log_2(\log_2 3) = \dfrac{\log_3(\log_2 3)}{\log_3 2} = \log_2 3 \cdot \log_3(\log_2 3) = \log_3(\log_2 3)^{\log_2 3}$

より 2 と $(\log_2 3)^{\log_2 3}$ の値を比較すれば良い。

$2^{11} = 2048 < 2187 = 3^7$ より $2^{\frac{11}{7}} < 3$ であるから $\log_2 3 > \dfrac{11}{7}$

$$\left(\frac{11}{7}\right)^3 = \frac{1331}{343} > \frac{1330}{343} = \frac{190}{49} > \frac{190}{50} = \frac{19}{5}$$

$$\left(\frac{11}{7}\right)^4 = \frac{14641}{2401} > \frac{14406}{2401} = 6$$

$$\left(\frac{11}{7}\right)^{11} = \left(\frac{11}{7}\right)^3\left(\frac{11}{7}\right)^4\left(\frac{11}{7}\right)^4 > \frac{19}{5} \cdot 6^2 = \frac{684}{5} > \frac{640}{5} = 128 = 2^7$$

よって、$\left(\dfrac{11}{7}\right)^{\frac{11}{7}} > 2$

$(\log_2 3)^{\log_2 3} > \left(\dfrac{11}{7}\right)^{\frac{11}{7}} > 2$ より $\log_2(\log_2 3) > \log_3 2$

以上、（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）より

$\log_2(\log_3 2) < \log_3(\log_3 2) < \log_3(\log_2 3) < \log_3 2 < \log_2(\log_2 3) < \log_2 3$