

a, b, c, x を実数とすると、 x の関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ で定義する。次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ の解を求めよ。

(2) $f(x) < 0$ の解を求めよ。

(3) $f(x) > 0$ の解を求めよ。

(解答)

(1) (i) $a \neq 0$ のとき

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) $a = 0$ のとき

(ii - i) $b \neq 0$ のとき

$$x = -\frac{c}{b}$$

(ii - ii) $b = 0$ のとき

(ii - ii - i) $c \neq 0$ のとき

解なし

(ii - ii - ii) $c = 0$ のとき

解は全ての実数

以上、(i) (ii) より、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (a \neq 0)$$

$$x = -\frac{b}{a} (a = 0, b \neq 0)$$

解なし ($a = b = 0, c \neq 0$)

解は全ての実数 ($a = b = c = 0$)

(2) (i) $a > 0$ のとき

(i - i) $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq x \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(i - ii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき

解なし

(ii) $a < 0$ のとき

(ii - i) $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき

$$x \leq -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x \geq -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii - ii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき

解なし

(iii) $a = 0$ のとき

(iii - i) $b > 0$ のとき

$$x < -\frac{c}{b}$$

(iii - ii) $b < 0$ のとき

$$x > -\frac{c}{b}$$

(iii - iii) $b = 0$ のとき

(iii - iii - i) $c \geq 0$ のとき

解なし

(iii - iii - ii) $c < 0$ のとき

解は全ての実数

以上、(i) (ii) (iii) より、

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq x \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a > 0, b^2 - 4ac \geq 0)$$

$$x \leq -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x \geq -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a < 0, b^2 - 4ac \geq 0)$$

$$x < -\frac{c}{b} \quad (a = 0, b > 0)$$

$$x > -\frac{c}{b} \quad (a = 0, b < 0)$$

解なし ($a \neq 0, b^2 - 4ac < 0$) または ($a = b = 0, c \geq 0$)

解は全ての実数 ($a = b = 0, c < 0$)

(3) (i) $a > 0$ のとき

(i - i) $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき

$$x \leq -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x \geq -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(i - ii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき

解なし

(ii) $a < 0$ のとき

(ii - i) $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq x \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii - ii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき

解なし

(iii) $a = 0$ のとき

(iii - i) $b > 0$ のとき

$$x > -\frac{c}{b}$$

(iii - ii) $b < 0$ のとき

$$x < -\frac{c}{b}$$

(iii - iii) $b = 0$ のとき

(iii - iii - i) $c > 0$ のとき

解はすべての実数

(iii - iii - ii) $c \leq 0$ のとき

解なし

以上、(i) (ii) (iii) より、

$$x \leq -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x \geq -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a > 0, b^2 - 4ac \geq 0)$$

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq x \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a < 0, b^2 - 4ac \geq 0)$$

$$x > -\frac{c}{b} \quad (a = 0, b > 0)$$

$$x < -\frac{c}{b} (a = 0, b < 0)$$

解なし $(a \neq 0, b^2 - 4ac < 0)$ $(a = b = 0, c \leq 0)$

解は全ての実数 $(a = b = 0, c > 0)$