$n, a_i (1 \leq i \leq n)$を自然数とするとき、$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)! \geq \prod_{i=1}^{n} a_i!$が成り立つことを示せ。

ただし、$\prod_{i=1}^{n} p_i = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$を表すものとする。

（解答）

（Ⅰ）$n=1$のとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)! = a_1!, \prod_{i=1}^{n} a_i! = a_1!$$ より成り立つ。

（Ⅱ）$n=2$のとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)! = (a_1 + a_2)!, \prod_{i=1}^{n} a_i! = a_1!a_2!$$

$$(a_1 + a_2)! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot a_1 \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_1 + 2) \cdot \cdots \cdot (a_1 + a_2)$$

$$(a_1 + 1) \cdot (a_1 + 2) \cdot \cdots \cdot (a_1 + a_2) \geq 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot a_2 = a_2!$$ より

$$(a_1 + a_2)! \geq a_1!a_2!$$

より成り立つ。

（Ⅲ）$n=k$のとき

「$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)! \geq \prod_{i=1}^{k} a_i!$が成り立つ$\Rightarrow$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)! \geq \prod_{i=1}^{k+1} a_i!$が成り立つ。」…（☆）

（☆）を示す。

$b_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ とおくと、

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)! = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right)! = (b_k + a_{k+1})! \geq b_k!a_{k+1}!$$

$$b_k!a_{k+1}! = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)!a_{k+1}! \geq \prod_{i=1}^{k} a_i!a_{k+1}! = \prod_{i=1}^{k+1} a_i!$$

より（☆）が成り立つ。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）よりすべての自然数nに対して$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)! \geq \prod_{i=1}^{n} a_i!$が成り立つ。