a,b,u,v を $0<a<1, 0<b<1, u>0, v>0$ を満たす実数とする。

（１）$(1+a)^b < 1+ab$ が成り立つことを示せ。

（２）$a=\dfrac{1}{1+u}, b=\dfrac{1}{1+v}$ とおいて、$a^b+b^a>1$ が成り立つことを示せ。

（解答）

（１）$f(x)=1+bx-(1+x)^b \ (x \geq 0)$ とおくと、

$$f'(x)=b-b(1+x)^{b-1}=b\left\{1-\frac{1}{(1+x)^{1-b}}\right\}$$

$x>0$ のとき $f'(x)>0$ であるので、$f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加である。

よって、$x>0$ のとき $f(x)>f(0)=0$ より $1+bx>(1+x)^b$ が成り立つ。

$x=a$ とおいて、$(1+a)^b<1+ab$ が成り立つ。

（２）$a=\dfrac{1}{1+u}, b=\dfrac{1}{1+v}$ より

$$a^b=\frac{1}{(1+u)^b}>\frac{1}{1+ub}=\frac{1}{1+u\cdot\dfrac{1}{1+v}}=\frac{1+v}{1+u+v}$$

$$b^a=\frac{1}{(1+v)^a}>\frac{1}{1+va}=\frac{1}{1+v\cdot\dfrac{1}{1+u}}=\frac{1+u}{1+u+v}$$

$$a^b+b^a>\frac{1+u}{1+u+v}+\frac{1+v}{1+u+v}=\frac{2+u+v}{1+u+v}>1$$