$a, b, a_k\ (k=1,2,3,\cdots,n)$ を0でない実数、$n$ を2以上の自然数とする。

（１） $a \leq b, a^2 \leq a+b \leq a^3, b^2 \leq a+b \leq b^3$ を満たすとき、$a^2+b^2$ の最大値および最小値をそれぞれ求めよ。

（２） ${a_k}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq {a_k}^3$ を満たすとき、$n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \leq n^3$ が成り立つことを示せ。

（解答）

（１） $a, b$ は0でない実数であるので、$a^2>0, b^2>0$ である。

また、$a^2 \leq a+b \leq a^3, b^2 \leq a+b \leq b^3$ より $a, b$ は正の数である。

$a \leq b$ より $2a \leq a+b \leq a^3, b^2 \leq a+b \leq 2b$ であるから、$2a \leq a^3, b^2 \leq 2b$

$a>0, b>0$ より $\sqrt{2} \leq a, b \leq 2$

よって、

$a=b=2$ のとき与えられた条件の不等式を満たすので $a^2+b^2$ は最大値8をとり、

$a=b=\sqrt{2}$ のとき与えられた条件の不等式を満たすので $a^2+b^2$ は最小値4をとる。

（２） $a_k \leq a_{k+1}(k=1,2,3,\cdots,n-1)$ としても一般性を失わない。

${a_k}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq {a_k}^3$ より $a_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ は正の数である。

$a_k \leq a_{k+1}(k=1,2,3,\cdots,n-1)$ より $na_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq {a_1}^3, {a_n}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq na_n$ である

から、$na_1 \leq a_1^3, a_n^2 \leq na_n$ が成り立つ。

$a_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)>0$ より $\sqrt{n} \leq a_1, a_n \leq n$

よって、

$a_k = n\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ のとき与えられた条件の不等式を満たすので

$\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$ は最大値 $n^2 \cdot n = n^3$ をとり、

$a_k = \sqrt{n}(k = 1,2,\cdots,n)$ のとき与えられた条件の不等式を満たすので

$\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$ は最小値 $n \cdot n = n^2$ をとる。