nを自然数とするとき、$n! < \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)^n$が成り立つことを示せ。

（解答）

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2}$$ より

$$\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n = \sqrt{1\cdot n\times 2(n-1)\times 3(n-2)\times\cdots\times n\cdot 1}$ より、

$k=1,2,3,\cdots,n$ とすると相加相乗平均より、

$$\sqrt{k(n-k+1)} \le \frac{k+(n-k+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

が成り立つ。ただし、等号成立は、$k=n-k+1$のときであり、それ以外は、

$$\sqrt{k(n-k+1)} < \frac{n+1}{2}$$

$$\sqrt{k(n-k+1)} \le \frac{n+1}{2} \cdots ①$$

①に $k=1,2,3,\cdots,n$ を代入したものをかけると $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$

よって、$n! < \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)^n$ が成り立つ