集合 X_k を次のように定める。

$$X_k = \left\{ \frac{1}{x} \middle| \ x\text{は}k\text{桁の自然数で}x\text{のすべての位に}1\text{を含まない。} \right\}$$

$s(X_k)$ を X_k のすべての要素の和とする。例えば、$s(X_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}$ である。

このとき、$s(X_1)+s(X_2)+\cdots+s(X_n)<2n$ が成り立つことを示せ。

（解答）

$$s(X_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}=\frac{\frac{9!}{2}+\frac{9!}{3}+\cdots+\frac{9!}{9}}{9!}$$

$$=\frac{181440+120960+90720+72576+60480+51840+40320}{362880}$$

$$=\frac{4609}{2520}$$

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\cdots+\frac{1}{29}<\frac{1}{20}\times 9<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{39}<\frac{1}{30}\times 9<\frac{1}{3}$$

:

$$\frac{1}{90}+\frac{1}{92}+\cdots+\frac{1}{99}<\frac{1}{90}\times 9<\frac{1}{9}$$

より

$s(X_2)<s(X_1)$

同様に $k\geq 2$ のとき

$$\frac{1}{2\times 10^{k-1}}+\frac{1}{2\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{2\times 10^{k-1}}\times 10^{k-1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3\times 10^{k-1}}+\frac{1}{3\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{3\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{3\times 10^{k-1}}\times 10^{k-1}=\frac{1}{3}$$

:

$$\frac{1}{9\times 10^{k-1}}+\frac{1}{9\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{9\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{9\times 10^{k-1}}\times 10^{k-1}=\frac{1}{9}$$

より

$s(X_k)<s(X_1)$

よって、

$$s(X_1)+s(X_2)+\cdots+s(X_n)<ns(X_1)=\frac{4609}{2520}n<2n$$

（参考1）

$s(X_1)+s(X_2)+\cdots+s(X_n)<20$が成り立つことを示す。

$s(X_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{77}{60}+\frac{1}{6}\times 4=\frac{39}{20}<2$

X_kの要素の個数は$k\geq 2$のとき最高位の数が8通り、残りの桁の数がそれぞれ9通りであるので、

$8\times 9^{k-1}$個

$$\frac{1}{2\times 10^{k-1}}+\frac{1}{2\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{2\times 10^{k-1}}\times 9^{k-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

$$\frac{1}{3\times 10^{k-1}}+\frac{1}{3\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{3\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{3\times 10^{k-1}}\times 9^{k-1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

$\vdots$

$$\frac{1}{9\times 10^{k-1}}+\frac{1}{9\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{9\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{9\times 10^{k-1}}\times 9^{k-1}=\frac{1}{9}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

より

$$s(X_k)<s(X_1)\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

よって、

$$s(X_1)+s(X_2)+\cdots+s(X_n)<s(X_1)\left\{1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\right\}=s(X_1)\left[1+\frac{\frac{9}{10}\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{9}{10}}\right]$$

$$=s(X_1)\left\{10-9\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right\}$$

$$<2\left\{10-9\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=20-18\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

より

$$s(X_1)+s(X_2)+\cdots+s(X_n)<20-18\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$n \to \infty$ のとき、$s(X_1)+s(X_2)+\cdots+s(X_n)<20$

（参考２）

$$X_{k,i}=\left\{\frac{1}{x}\,\middle|\, x\text{は}k\text{桁の自然数で}x\text{のすべての位に}i\text{を含まない。}\right\}\ (i=0,1,2,\cdots,9)$$

とすると、$s(X_{k,i})$を$X_{k,i}$のすべての要素の和とする。例えば、$s(X_{1,2})=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}$である。

このとき、$s(X_{1,i})+s(X_{2,i})+\cdots+s(X_{n,i})$は、$n \to \infty$ のとき収束することを示せる。

明らかに$s(X_{k,i})\le s(X_{k,9})$であり、

$$\frac{1}{1\times 10^{k-1}}+\frac{1}{1\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{1\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{1\times 10^{k-1}}\times 9^{k-1}=\frac{1}{1}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

$$\frac{1}{2\times 10^{k-1}}+\frac{1}{2\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{2\times 10^{k-1}}\times 9^{k-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

：

$$\frac{1}{8\times 10^{k-1}}+\frac{1}{8\times 10^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{8\times 10^{k-1}+10^{k-1}-1}<\frac{1}{8\times 10^{k-1}}\times 9^{k-1}=\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

より

$$s(X_{k,9})<s(X_{1,9})\times\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

$$s(X_{1,9})+s(X_{2,9})+\cdots+s(X_{n,9})<s(X_{1,9})\left\{1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\right\}=s(X_{1,9})\left[1+\frac{\frac{9}{10}\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{9}{10}}\right]$$

$$=s(X_{1,9})\left\{10-9\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right\}$$

$n \to \infty$ のとき、$s(X_{1,i})+s(X_{2,i})+\cdots+s(X_{n,i})\le s(X_{1,9})+s(X_{2,9})+\cdots+s(X_{n,9})\le 10s(X_{1,9})$

より $s(X_{1,9})$は定数であるので収束する。