媒介変数表示$\begin{cases} x=\sin 3\theta \\ y=\sin 4\theta \end{cases}$で表される曲線を$C$とする。$C$が自身と交わる点の個数を求めよ。

（解答）

$\theta \to \pi+\theta$とすると、

$x=\sin 3(\pi+\theta)=-\sin 3\theta=-x,\ y=\sin 4(\pi+\theta)=\sin 4\theta=y$より$C$は$y$軸対称である。

$\theta \to \pi-\theta$とすると、

$x=\sin 3(\pi-\theta)=\sin 3\theta=x,\ y=\sin 4(\pi-\theta)=-\sin 4\theta=-y$より$C$は$x$軸対称である。

$\theta \to 2\pi-\theta$とすると、

$x=\sin 3(2\pi-\theta)=-\sin 3\theta=-x,\ y=\sin 4(2\pi-\theta)=-\sin 4\theta=-y$より$C$は原点対称である。

よって、$x\geq 0,\ y\geq 0$の範囲においてCの概形を調べる。

$x\geq 0$かつ$y\geq 0$となるθの範囲を求める。

xの周期は$\dfrac{2}{3}\pi,\ y$の周期は$\dfrac{\pi}{2}$より2πの周期で原点に戻ってくるので、$0\leq\theta\leq 2\pi$の範囲で考える。

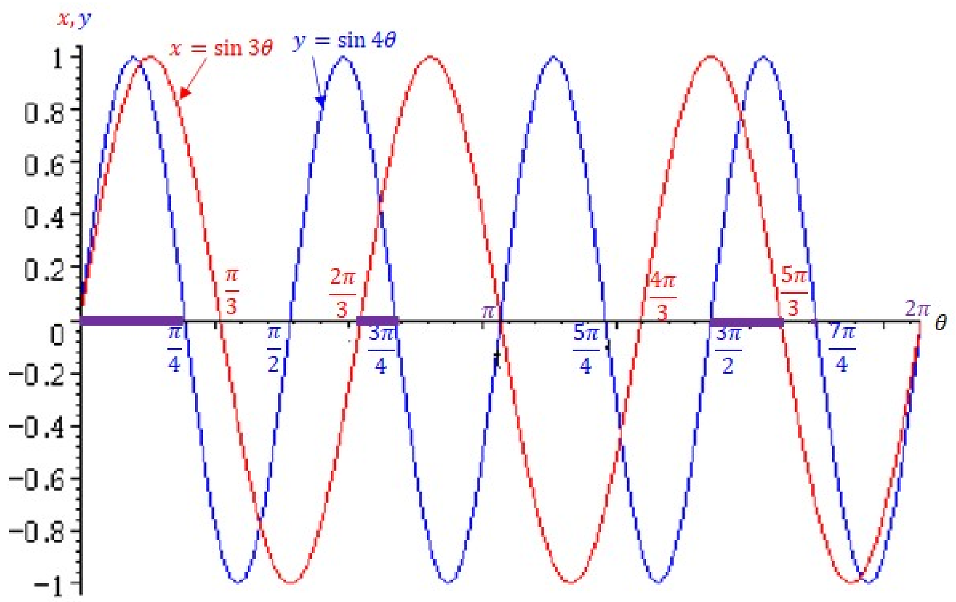
$x\geq 0$より$\sin 3\theta\geq 0$であるから、$0\leq 3\theta\leq 6\pi$より$0\leq 3\theta\leq\pi,\ 2\pi\leq 3\theta\leq 3\pi,\ 4\pi\leq 3\theta\leq 5\pi$

であるから、$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi\leq\theta\leq\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi\leq\theta\leq\dfrac{5}{3}\pi\cdots$①

$y\geq 0$より$\sin 4\theta\geq 0$であるから、$0\leq 4\theta\leq 8\pi$より

$0\leq 4\theta\leq\pi,\ 2\pi\leq 4\theta\leq 3\pi,\ 4\pi\leq 4\theta\leq 5\pi,\ 6\pi\leq 4\theta\leq 7\pi$であるから、

$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{3}{4}\pi,\ \pi\leq\theta\leq\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\leq\theta\leq\dfrac{7}{4}\pi\cdots$②



$x\geq 0$かつ$y\geq 0$となるθの範囲は、①かつ②より$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2}{3}\pi\leq\theta\leq\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\leq\theta\leq\dfrac{5}{3}\pi$

$\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos 3\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=4\cos 4\theta$ より

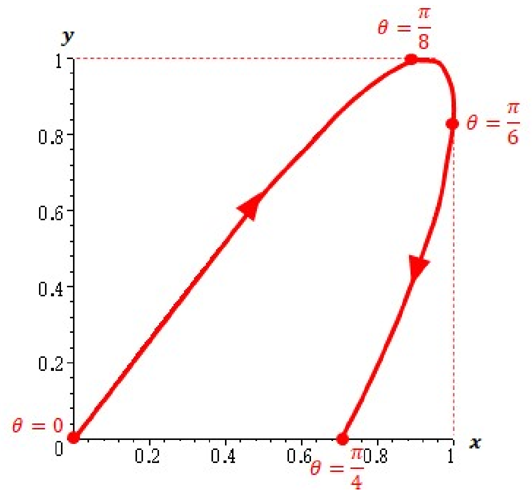
$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ のとき $3\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ のとき

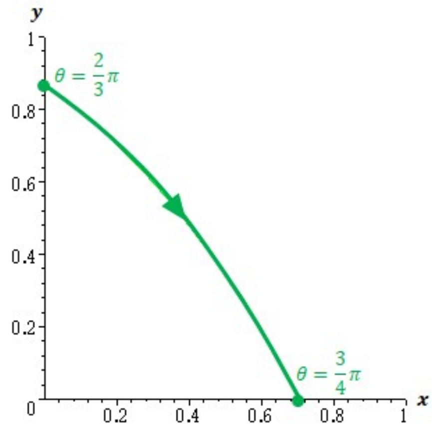
$4\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi,\ \dfrac{13}{2}\pi,\ \dfrac{15}{2}\pi \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{9}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{13}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$

より増減表を描くと、

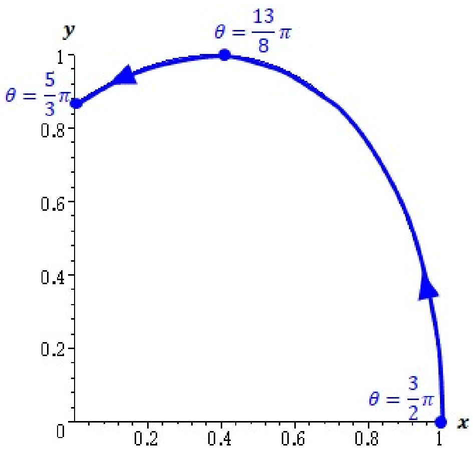
θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
x	0	$\uparrow$	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\dfrac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	0



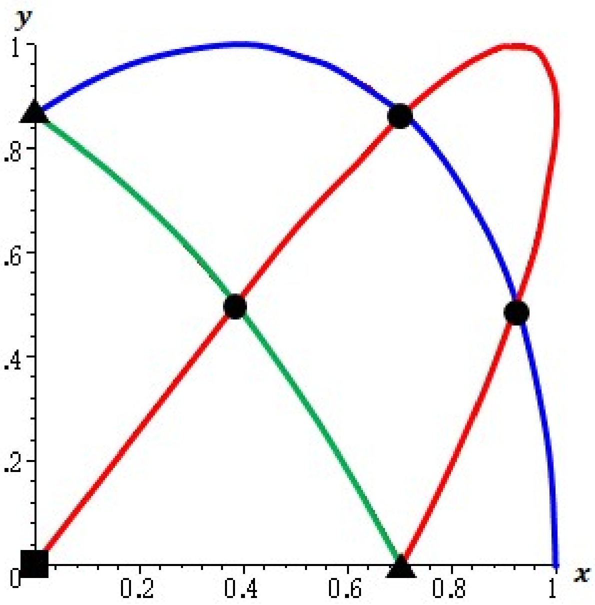
θ	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$
$\dfrac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	$+$
x	0	$\uparrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\dfrac{dy}{d\theta}$	$-$	$-$	$-$
y	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	0



θ	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{13}{8}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$
$\dfrac{dx}{d\theta}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	1	$\downarrow$	$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\downarrow$	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



よりグラフを描くと、



$x>0,\ y>0$ に存在する点（●）は対称を考慮すると 4 倍存在し、
x 軸または y 軸上に存在する点（▲）は対称を考慮すると 2 倍存在し、
原点に存在する点（■）は対称を考慮しても1点のみ存在する。
よって C が自身と交わる点の個数は $3\times4+2\times2+1=17$ である。

（参考）
x 軸対称かつ y 軸対称であるので、C は以下のようになる。