座標平面上に次の曲線Cと直線lが存在する。

$$\begin{cases} C : y = x^x (x > 0) \\ l : y = k \end{cases}$$

（１） $\log x < \sqrt{x}\ (x > 0)$が成り立つことを示せ。

（２） $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$を求めよ。

（３） Cとlとが異なる2点で交わるようなkの範囲を求めよ。

（４） $x^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$を満たす$x$の値をすべて求めよ。

(解答)

（１） $f(x) = \sqrt{x} - \log x\ (x > 0)$とおくと、

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2x}$ より

$f'(x) = 0$を満たすxの値は、$x = 4$であるので、増減表を描くと、

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	$2 - 2\log 2$	$\uparrow$

より、$2 - 2\log 2 > 0$であるから、$x > 0$のとき常に$f(x) > 0$より$\log x < \sqrt{x}$ …①

が成り立つ。

（２）①の両辺をxで割って、

$\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$x \to \infty$のとき$0 < \dfrac{\log x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$よりはさみうちの定理から$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$

$x = \dfrac{1}{t}$とおくと、$\dfrac{\log x}{x} = \dfrac{\log \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = -t \log t$

$x \to \infty$のとき$t \to +0$より$\displaystyle\lim_{t \to +0} t \log t = 0$

よって、$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x = 1$

（３） $g(x) = x^x$とおいて両辺に対数を取ると、

$\log g(x) = x\log x \cdots ②$

②の両辺を x で微分すると、

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$$

より、

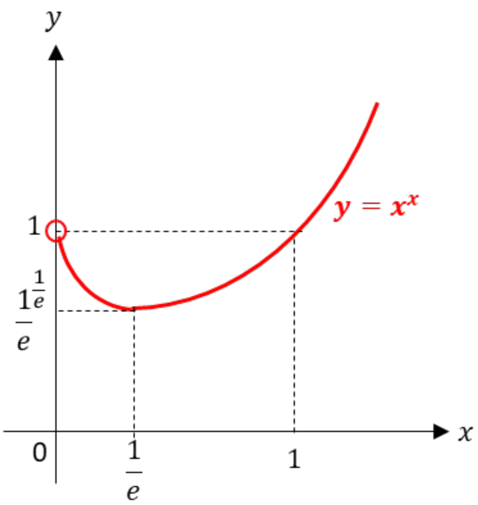
$$g'(x) = x^x(\log x + 1)$$

となり、

$g'(x) = 0$ を満たす x の値は、$x = \dfrac{1}{e}$ であるので、増減表を描くと、

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$g'(x)$	$(-)$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	(1)	$\downarrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	$\uparrow$	1

よりグラフを描くと、



よって C と l とが異なる 2 点で交わるような k の範囲は、$\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < k < 1$

（4）$x^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ であり、

（3）より $0 < x < 1$ において実数解は 2 個であるので、$x = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$