$a,b,c>0, a+b+c=1$ のとき、$a^a b^b c^c$ の最小値を求めよ。

（解答）

$c=1-a-b$ より、$a^a b^b c^c = a^a b^b (1-a-b)^{1-a-b}$

$f=f(a,b)=a^a b^b (1-a-b)^{1-a-b}$ とおくと、

$$\frac{df}{da}=a^a(\log a+1)b^b(1-a-b)^{1-a-b}-a^a b^b(1-a-b)^{1-a-b}\{\log(1-a-b)+1\}$$

$$=a^a b^b (1-a-b)^{1-a-b}\{\log a-\log(1-a-b)\}$$

$\dfrac{df}{da}=0 \Leftrightarrow \log a=\log(1-a-b)$ より、$a=\dfrac{1-b}{2}$

$\dfrac{df}{da}$ は、$a=\dfrac{1-b}{2}$ の前後で負から正に変化するので $f(a,b)$ は、$a=\dfrac{1-b}{2}$ のときに最小になる。

$f(a,b)=f(b,a)$ より、

$\dfrac{df}{da}$ は、$b=\dfrac{1-a}{2}$ の前後で負から正に変化するので $f(a,b)$ は、$b=\dfrac{1-a}{2}$ のときに最小になる。

$a=\dfrac{1-b}{2}$ かつ $b=\dfrac{1-a}{2}$ より、$a=b=\dfrac{1}{3}$ となり、$c=1-a-b=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって、$a^a b^b c^c$ は、$a=b=c=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$ をとる。