$y=\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ で定義する。ただし、$t=\tan\theta$ の逆関数を $\theta=\tan^{-1}t$ で表すものとする。

（１）$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

（２）$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

（３）$\dfrac{d^3y}{dx^3}$ を求めよ。

（４）$\dfrac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$（$n$ 回微分）を求めよ。

(解答)

（１）$\tan y=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\tan y}$ より、$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{1}{\sin^2 y}\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\sin^2 y$

（２）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=-\sin^2 y\dfrac{d}{dy}\left(-\sin^2 y\right)=\sin^2 y\sin 2y$

（３）
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-\sin^2 y\frac{d}{dy}\left(\sin^2 y\sin 2y\right)$$

$$=-\sin^2 y\left(2\sin y\cos y\sin 2y+2\sin^2 y\cos 2y\right)$$

$$=-2\sin^3 y\left(\cos y\sin 2y+\sin y\cos 2y\right)$$

$$=-2\sin^3 y\sin 3y$$

（４）
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=-\sin^2 y\frac{d}{dy}\left(-2\sin^3 y\sin 3y\right)$$

$$=2\sin^2 y\left(3\sin^2 y\cos y\sin 3y+3\sin^3 y\cos 3y\right)$$

$$=6\sin^4 y\left(\cos y\sin 3y+\sin y\cos 3y\right)$$

$$=6\sin^4 y\sin 4y$$

より、$\dfrac{d^ny}{dx^n}=(-1)^n(n-1)!\sin^n y\sin ny$・・・（★）と推定する。

（★）を数学的帰納法により証明する。

（ｉ）$n=1$のとき

明らかに成り立つ

（ⅱ） $n=k$ のとき

$$\frac{d^k y}{dx^k}=(-1)^k(k-1)!\sin^k y\sin ky$$

$$\Rightarrow \frac{d^{(k+1)}y}{dx^{(k+1)}}=(-1)^{k+1}k!\sin^{(k+1)} y\sin(k+1)y \quad \cdots(＊)$$

が成り立つことを示す。

$$\frac{d^{(k+1)}y}{dx^{(k+1)}}=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)=-\sin^2 y\frac{d}{dy}\left\{(-1)^k(k-1)!\sin^k y\sin ky\right\}$$

$$=(-1)^{k+1}(k-1)!\sin^2 y\left(k\sin^{k-1} y\cos y\sin ky+k\sin^k y\cos ky\right)$$

$$=(-1)^{k+1}k!\sin^{k+1} y(\cos y\sin ky+\sin y\cos ky)$$

$$=(-1)^{k+1}(k+1)!\sin^{k+1} y\sin(k+1)y$$

よって、（＊）が示された。

ゆえに、（ⅰ）（ⅱ）より、（★）が成り立つ。

以上、全ての自然数 n に対して、$\dfrac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n(n-1)!\sin^n y\sin ny$ である。