$x>0$とする。次の不等式を示せ。

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2n-2}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2n-1}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}<\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2n-2}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}$$

（解答）

数学的帰納法で示す。

（Ⅰ） $n=1$のとき

「$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x, 1-\frac{x^2}{2!}<\cos x<1$」・・・（☆）を示す。

$f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right), g(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)$とおくと、

$$f'(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)=g(x),$$

$f''(x)=-\sin x+x=g'(x),$

$f'''(x)=-\cos x+1=g''(x)$

$-1\leq\cos x\leq 1$より、$f'''(x), g''(x)\geq 0$より、$f''(x), g'(x)$は増加関数である。

$f''(0)=g'(0)=0$より、$f'(x), g(x)$は増加関数である。

$f'(0)=g(0)=0$より、$f(x)$は増加関数であり、$g(x)>0$である。

$f(0)=0$より、$f(x)>0$である。

よって、（☆）は成り立つ。

（Ⅱ） $n=k$のとき

「$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2k-1}\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2k-2}\frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!}$

$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2k-1}\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}<\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2k-2}\frac{x^{4k-4}}{(4k-4)!}$

が成り立てば、

$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2k+1}\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2k}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}$

$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2k+1}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}<\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2k}\frac{x^{4k}}{(4k)!}$

が成り立つ」・・・（☆☆）を示す。

$$f_{1,k+1}(x)=\sin x-\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2k+1}\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right\},$$

$$f_{2,k+1}(x)=\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2k}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}\right\}-\sin x,$$

$$g_{1,k+1}(x)=\cos x-\left\{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2k+1}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\right\},$$

$$g_{2,k+1}(x)=\left\{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2k}\frac{x^{4k}}{(4k)!}\right\}-\cos x,$$

とおくと、（☆☆）は、

「$f_{1,k}(x)>0, f_{2,k}(x)>0, g_{1,k}(x)>0, g_{2,k}(x)>0$ が成り立てば、

$f_{1,k+1}(x)>0, f_{2,k+1}(x)>0, g_{1,k+1}(x)>0, g_{2,k+1}(x)>0$ が成り立つ」・・・（☆☆☆）

と同じである。

$$f_{1,k+1}'(x)=\cos x-\left\{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2k+1}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\right\}=g_{1,k+1}(x),$$

$$f_{1,k+1}''(x)=-\sin x-\left\{-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots-(-1)^{2k+1}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}\right\}=f_{2,k+1}(x),$$

$$f_{1,k+1}'''(x)=-\cos x-\left\{-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots-(-1)^{2k+1}\frac{x^{4k}}{(4k)!}\right\}=g_{2,k+1}(x),$$

$$f_{1,k+1}''''(x)=\sin x-\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{2k-1}\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}\right\}=f_{1,k}(x),$$

仮定より、$f_{1,k}(x)>0$ であるので、

$g_{2,k+1}(x)$ は増加関数であり、$g_{2,k+1}(0)=0$ であるので、$g_{2,k+1}(x)>0$

$f_{2,k+1}(x)$ は増加関数であり、$f_{2,k+1}(0)=0$ であるので、$f_{2,k+1}(x)>0$

$g_{1,k+1}(x)$ は増加関数であり、$g_{1,k+1}(0)=0$ であるので、$g_{1,k+1}(x)>0$

$f_{1,k+1}(x)$ は増加関数であり、$f_{1,k+1}(0)=0$ であるので、$f_{1,k+1}(x)>0$

よって、（☆☆☆）が成り立つので（☆☆）が成り立つ。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、全ての自然数 n に対して題意が成り立つ。