$a,b,c>0, x,y,z>0$ とする。

（1） $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$ のとき、x^2+y^2 の最小値を求めよ。

（2） $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1$ のとき、$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

(解答)

（1） $x \geq a$ とすると、$\dfrac{b}{y}<0$ となるので、$x<a$

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{bx}{x-a}$ より、

$$x^2+y^2=x^2+b^2\left(\frac{x}{x-a}\right)^2$$

$f(x)=x^2+b^2\left(\dfrac{x}{x-a}\right)^2$ とおくと、

$$f'(x)=2x+b^2\cdot\frac{2x\cdot(x-a)^2-x^2\cdot 2(x-a)}{(x-a)^4}(x-a)=2x\left\{1-\frac{ab^2}{(x-a)^3}\right\}=2x\cdot\frac{(x-a)^3-ab^2}{(x-a)^3}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-a)^3=ab^2 \Leftrightarrow x=a+\sqrt[3]{ab^2}=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$$

$f'(x)$ は $x=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$ の前後で負から正に変化するので、

$f(x)$ は $x=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$ のときに最小値をとる。

$x=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$ のとき、

$$y=\frac{b\left(a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)-a}=\frac{b\left(a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)-a}=\frac{a^{\frac{1}{3}}b\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}=b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$$

よって、x^2+y^2 は $x=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right), y=b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$ のとき最小値 $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$ をとる。

（２） $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1-\dfrac{c}{z}\ (0<z<c)$

$1-\dfrac{c}{z}=t\ (0<t<1)$とおくと、

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=t \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{a}{t}\right)}{x}+\frac{\left(\frac{b}{t}\right)}{y}=1$$

（１）の結果より、

$x=\dfrac{1}{t}\cdot a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right), y=\dfrac{1}{t}\cdot b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$のとき、最小値$\dfrac{1}{t^2}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$を取る。

また、$z=\dfrac{c}{1-t}$より、$x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{1}{t^2}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(\dfrac{c}{1-t}\right)^2$

$f(t)=\dfrac{1}{t^2}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(\dfrac{c}{1-t}\right)^2$とおき、$s=\dfrac{1}{t}\ (s>1)$とおくと、

$$\frac{1}{t^2}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(\frac{c}{1-t}\right)^2=s^2\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3+c^2\left(\frac{s}{s-1}\right)^2$$

$$=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3\left\{s^2+\frac{c^2}{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3}\cdot\left(\frac{s}{s-1}\right)^2\right\}$$

$\dfrac{c^2}{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3}=A^2,\ g(s)=s^2+A^2\cdot\left(\dfrac{s}{s-1}\right)^2$とおくと、

（１）より、$b=A, a=1$とおいたものを考えると、

$g(s)$は$s=1+A^{\frac{2}{3}}$のとき、最小値$\left(1+A^{\frac{2}{3}}\right)^3$をとる。

$$t=\frac{1}{s}=\frac{1}{1+A^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}},$$

$$x=\frac{1}{t}\cdot a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$y=\frac{1}{t}\cdot b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$z=\frac{c}{1-t}=\frac{c}{1-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}}=\frac{c\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)}{c^{\frac{2}{3}}}=c^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3\left(1+A^{\frac{2}{3}}\right)^3=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3\left(1+\frac{c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}\right)^3=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

よって、$x=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right), y=b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right), z=c^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)$のとき、

$x^2+y^2+z^2$は最小値$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^3$をとる。