tの関数 $f(t), g(t)$ は、それぞれ t で3回微分まで可能であるとする。 $x = f(t), y = g(t)$ で定義する。
次の値を $f(t), g(t), f'(t), g(t), f''(t), g''(t), f'''(t).g'''(t)$ の中から必要なものを用いて表せ。

（1） $\dfrac{d^2 y}{d^2 x}$

（2） $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

（3） $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$

（解答）

（1） $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = f''(t), \dfrac{d^2 y}{dt^2} = g''(t)$ より、 $\dfrac{d^2 y}{d^2 x} = \dfrac{\dfrac{d^2 y}{dt^2}}{\dfrac{d^2 x}{dt^2}} = \dfrac{g''(t)}{f''(t)}$

（2） $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\{f'(t)\}^2}\dfrac{1}{f'(t)} = \dfrac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\{f'(t)\}^3}$

（3） $\dfrac{d^3 y}{dx^3} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\{f'(t)\}^3}\right\}\dfrac{dt}{dx}$

$$= \frac{\{f''(t)g''(t) + f'(t)g'''(t) - f'''(t)g'(t) - f''(t)g''(t)\}\{f'(t)\}^3 - 3\{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)\}\{f'(t)\}^2 f''(t)}{\{f'(t)\}^6}$$

$$= \frac{\{f'(t)g'''(t) - f'''(t)g'(t)\}\{f'(t)\} - 3\{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)\}f''(t)}{\{f'(t)\}^4}$$