$f(x) = x^x, g(x) = \left(x^x\right)^x, h(x) = x^{\left(x^x\right)} (x > 0)$ とおく。

（１） $f(x)$ の導関数を求めよ。

（２） $g(x)$ の導関数を求めよ。

（３） $h(x)$ の導関数を求めよ。

(解答)

（１） $f(x) = x^x \Leftrightarrow \log f(x) = x \log x$ の両辺を微分して、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = f(x)(\log x + 1) = x^x (\log x + 1)$$

（２） $g(x) = \left\{f(x)\right\}^x \Leftrightarrow \log g(x) = x \log f(x)$ の両辺を微分して、

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log f(x) + x\frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x) = g(x)\left\{\log f(x) + \frac{xf'(x)}{f(x)}\right\}$$

$$= \left(x^x\right)^x \left\{\log(x^x) + x(\log x + 1)\right\} = x^{x^2+1}(2\log x + 1)$$

（３） $h(x) = x^{f(x)} \Leftrightarrow \log h(x) = f(x) \log x$ の両辺を微分して、

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = f'(x)\log x + f(x)\frac{1}{x} \Leftrightarrow h'(x) = h(x)\left\{f'(x)\log x + \frac{f(x)}{x}\right\}$$

$$= x^{\left(x^x\right)}\left\{x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\right\} = x^{\left(x^x + x - 1\right)}\left\{x(\log x + 1)\log x + 1\right\}$$