座標平面上に3点$O(0,0), A(0,2), B(2,2)$を頂点とする△OABと点Pが存在する。点Pは、△OABの辺上とその内部を動くことが可能である。Pは、△OABの辺OA, AB上を1秒間に2の速度で動き、△OABの辺OB上と内部を1秒間に1の速度で動くことが可能である。Pは最初Oの位置に存在する。

（１）Pが点$C(a,0)$を経由し、点$Q(x,y)$に達するまでの時間の最小値を、x,yを用いて表せ。

（２）Pが点$D(2,b)$を経由し、点$Q(x,y)$に達するまでの時間の最小値を、x,yを用いて表せ。

（３）Pが1秒間で行くことができる領域を図示せよ。

（４）Pが2秒間で行くことができる領域を図示せよ。

（５）Pが△OABの辺とその内部のどの点にも到達することができる最短時間と座標を求めよ。

(解答)

（１）Pが点$C(a,0)$を経由し、点$Q(x,y)$に達するまでの時間をt_1とおくと、

$$t_1=\frac{OC}{2}+CQ=\frac{a}{2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$\frac{dt_1}{da}=\frac{1}{2}+\frac{a-x}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}+(a-x)}{2\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$\frac{dt_1}{da}=0$のとき、$a=x\pm\frac{y}{\sqrt{3}}$であり、$\frac{dt_1}{da}$は、$a=x-\frac{y}{\sqrt{3}}$の前後で負から正に変化するので

t_1は$a=x-\frac{y}{\sqrt{3}}$のとき最小値$t_1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+y^2}=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y$をとる。

（２）Pが点$D(2,b)$を経由し、点$Q(x,y)$に達するまでの時間をt_2とおくと、

Pは、$O\to A\to D\to Q$の順で動くのが最短になるので、

$$t_2=\frac{OA}{2}+\frac{AD}{2}+DQ=1+\frac{b}{2}+\sqrt{(2-x)^2+(y-b)^2}$$

$$\frac{dt_2}{db}=\frac{1}{2}+\frac{b-y}{\sqrt{(2-x)^2+(y-b)^2}}=\frac{\sqrt{(2-x)^2+(y-b)^2}+(b-y)}{2\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$\frac{dt_2}{db}=0$のとき、$b=y\pm\frac{2-x}{\sqrt{3}}$であり、$\frac{dt_2}{db}$は、$b=y-\frac{2-x}{\sqrt{3}}$の前後で負から正に変化するので

t_2は$b=y-\frac{2-x}{\sqrt{3}}$のとき最小値$t_2=1+\frac{1}{2}\left(y-\frac{2-x}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{(2-x)^2+\left(\frac{2-x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}+1$

をとる。

（３）1秒以下のとき、Pは辺AB上に達することができないので、t_1のみについて考える。

Pが1秒以下で到達することができる範囲は、△OABの内部であるので$0\le x\le 2$かつ$0\le y\le 2$かつ$y\le x$の領域であり、かつ$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y\le 1$の領域となる。$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y\le 1$より、$y\le -\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$であるので、領域は図１のようになる。

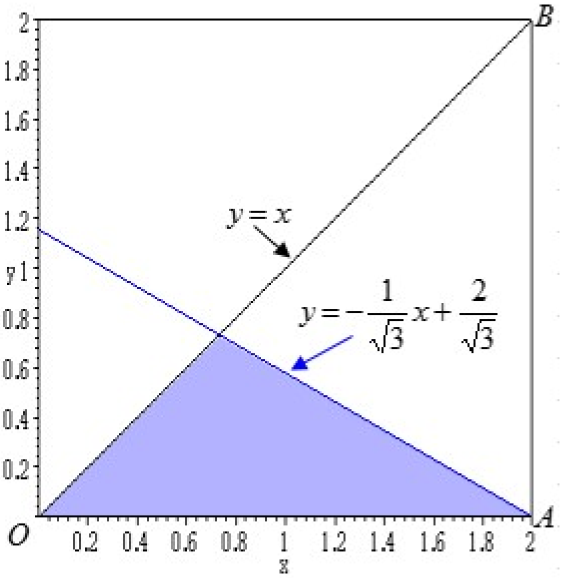

図 1

（4） 2 秒以下のとき、P は辺 AB 上に達することができるので、t_1, t_2 の両方について考える。

（Ⅰ） t_1 について

P が到達することができる範囲は、△OAB の内部であるので $0 \le x \le 2$ かつ $0 \le y \le 2$ かつ $y \le x$ の領域であり、かつ $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y \le 2$ の領域となる。$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y \le 2$ より、$y \le -\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{4}{\sqrt{3}}$ であるので、領域は図 2 の赤色のようになる。

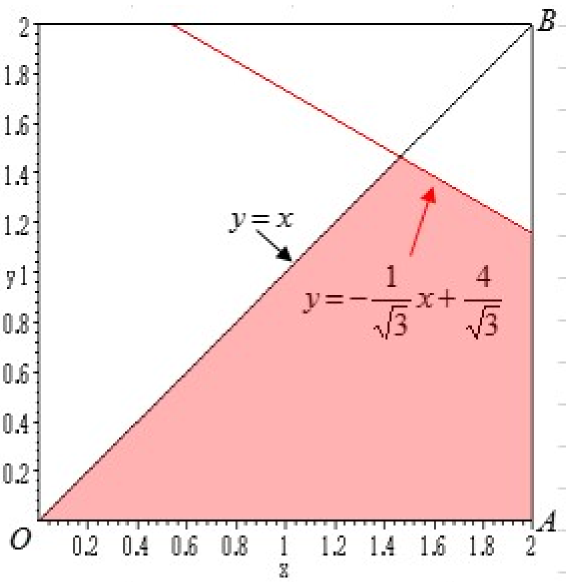

図 2

（Ⅱ） t_2 について

P が到達することができる範囲は、△OAB の内部であるので $0 \le x \le 2$ かつ $0 \le y \le 2$ かつ

$y \le x$ の領域であり、かつ $\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} + 1 \le 2$ の領域となる。$\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} + 1 \le 2$ より、$y \le \sqrt{3}x - 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$ であるので、領域は図 3 の緑色のようになる。

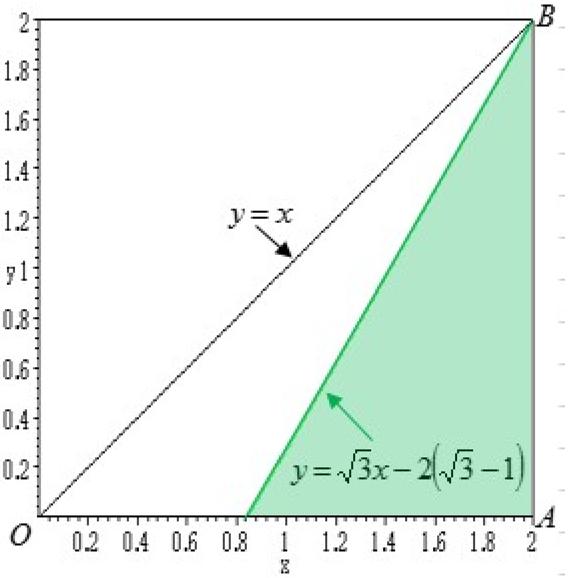

図 3

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、求める領域は図 2 の赤色の領域と図 3 の緑色の領域を合わせた部分であるので、図 4 の紫色のようになる。

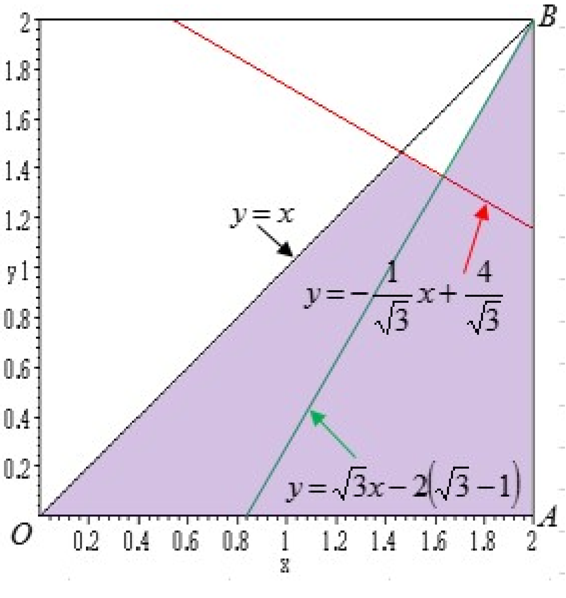

図 4

（5） $y \le x$ において、x を固定して y を動かしたとき、t_1, t_2 ともに値が最大になるのは $y = x$ のときであるので、求める時間と座標は、

$t_1 = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y, t_2 = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} + 1, t = t_1 = t_2, x = y$ を満たす t, x, y である。

$t=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}, x=y=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より、P が△OAB の辺とその内部のどの点にも到達することができる最短時間は$1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$秒、そのときの座標は、$\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$である。