関数 $f(x), g(x), h(x)$ は x について微分可能である。

（１）微分の定義に従って $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が成り立つことを示せ。

（２）微分の定義に従って $\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$ が成り立つことを示せ。

（解答）

（１）微分の定義より、

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

（２）$\{f(x)g(x)h(x)\}'$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - f(x)g(x)h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)h(x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&\quad + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - f(x)g(x)h(x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&\quad + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x)h(x+\Delta x) - f(x)g(x)h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) \\
&\quad + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} h(x+\Delta x) \\
&\quad + f(x)g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)
\end{aligned}$$