$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ を求めよ。

（解答）

$f(x)=\sqrt{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}$ とおくと、$I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ となり、

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1+\sqrt{(-x)^4+(-x)^2+1}}=\sqrt{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}=f(x)$ より

$f(x)$ は偶関数であるので、$I=2\int_{0}^{1}f(x)dx$ となる。

$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$x^2+1=\frac{1}{2}\{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)\}$ より

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{\frac{1}{2}\{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)\}+\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)+2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)^2}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right|
\end{aligned}
$$

$x^2\pm x+1=\left(x\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ より $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}>0$ となるから、

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

よって、

$$
\begin{aligned}
I&=2\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)dx\\
&=\sqrt{2}\left(\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+x+1}dx+\int_{0}^{1}\sqrt{x^2-x+1}dx\right)
\end{aligned}
$$

$I_1=\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+x+1}dx,\ I_2=\int_{0}^{1}\sqrt{x^2-x+1}dx$ とおくと、$I=\sqrt{2}(I_1+I_2)$ となる。

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ より $x+\frac{1}{2}=t$ とおくと、$dx=dt,\ x:0\to1\Rightarrow t:\frac{1}{2}\to\frac{3}{2}$ となるので、

$$I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}dt$$

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より $x-\dfrac{1}{2}=t$ とおくと、$dx=dt,\ x:0\to1\Rightarrow t:-\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$ となるので、

$$I_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}dt$$

$$I=\sqrt{2}(I_1+I_2)=\sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}dt+\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}dt=\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}dt$$

ここで、a を正の実数の定数とすると、

$$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$ より

$$\int\sqrt{x^2+a}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}dx+a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$$

よって、$\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)+C$ （C:積分定数）

となるので、$a=\dfrac{3}{4}$ として、

$$I=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\log\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left\{\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{4}\log\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right\}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left\{2 + 6\sqrt{3} + 3\log\left(3 + 2\sqrt{3}\right)\right\}}{8}$$