x, y, z が次の（＊）の式を満たしている。

$$\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 + 2 \\ z = y^4 - 4y^2 + 2 \cdots（＊） \\ x = z^4 - 4z^2 + 2 \end{cases}$$

（＊）を満たす実数(x, y, z)の組をすべて求めよ。

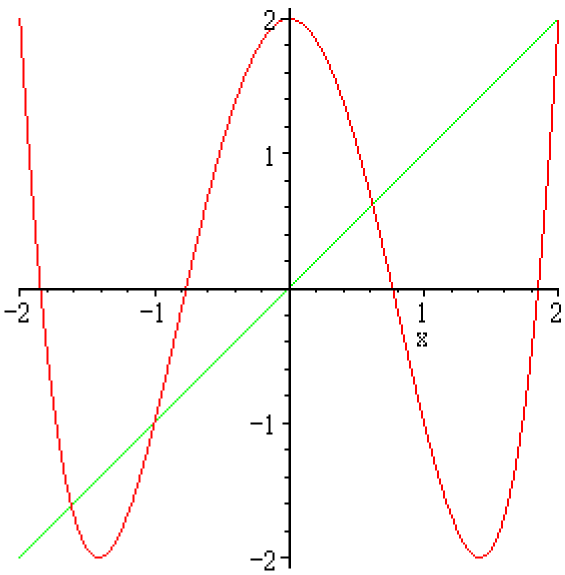
（解答）

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ とおくと、

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ より増減表を描くと、

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	2	$\uparrow$

より



$|x| > 2$ のとき $|f(x)| > |x|$ が成り立つので、$|x| > 2$ のとき $|y| > |x|$ が成り立ち、$|y| > 2$ のとき $|z| > |y|$ が成り立ち、$|z| > 2$ のとき $|x| > |z|$ が成り立つので、$|x| > |z| > |y| > |x|$ となって不適。

よって、$|x| \le 2$ が成り立つ。

同様に、$|y| \le 2, |z| \le 2$ が成り立つ。

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ より

$x = 2\cos\theta \ (0 \le \theta \le \pi)$とおくと、

$$y = (2\cos\theta)^4 - 4(2\cos\theta)^2 + 2 = 2(8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1) = 2\cos 4\theta$$

$$z = (2\cos 4\theta)^4 - 4(2\cos 4\theta)^2 + 2 = 2(8\cos^4 4\theta - 8\cos^2 4\theta + 1) = 2\cos 16\theta$$

$$x = (2\cos 16\theta)^4 - 4(2\cos 16\theta)^2 + 2 = 2(8\cos^4 16\theta - 8\cos^2 16\theta + 1) = 2\cos 64\theta$$

より$\cos 64\theta = \cos\theta$となり、$64\theta = 2n\pi \pm \theta$より

$\theta = \dfrac{2k}{63}\pi \ (k = 0,1,2,\cdots,31)$、$\theta = \dfrac{2l}{65}\pi \ (l = 1,2,\cdots,32)$

よって、$(x, y, z) = (2\cos\theta, 2\cos 4\theta, 2\cos 16\theta)$

ただし、$\theta = \dfrac{2k}{63}\pi \ (k = 0,1,2,\cdots,31)$、$\theta = \dfrac{2l}{65}\pi \ (l = 1,2,\cdots,32)$