n, a, b, c, d を自然数とする。

$$\begin{cases} a+b+c+d=n \\ a \le b+c+d \\ b \le c+d+a \\ c \le d+a+b \\ d \le a+b+c \end{cases}$$

を満たす(a,b,c,d)の組み合わせの個数を求めよ。

（解答）

求める組み合わせの個数を$S(n)$とする。

$a+b+c+d=n$ となる組み合わせは${}_{n-1}C_3$通り

（ｉ）nが奇数のとき

$a>b+c+d \Leftrightarrow a>n-a \Leftrightarrow a>\dfrac{n}{2}$となり、$a$は自然数より$a>\dfrac{n-1}{2}$

$a>b+c+d$ となる組み合わせの数は、$A=a-\dfrac{n-1}{2}$とおいて、

$A+b+c+d=\dfrac{n+1}{2}$となる自然数(A,b,c,d)組み合わせの数であるので、${}_{\frac{n+1}{2}-1}C_3$通り

同様に$b>c+d+a,\ c>d+a+b,\ d>a+b+c$となる組み合わせの数も${}_{\frac{n+1}{2}-1}C_3$通り

$a>b+c+d,\ b>c+d+a,\ c>d+a+b,\ d>a+b+c$となる条件は互いに排反である。

よって、求める組の個数は、$a+b+c+d=n$を満たす(a,b,c,d)の組み合わせの個数から

$a>b+c+d$または$b>c+d+a$または$c>d+a+b$または$d>a+b+c$を満たす

組み合わせの個数を引けば良いので、

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_3-4\cdot{}_{\frac{n+1}{2}-1}C_3 &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}-4\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}}{6} \\ &= \frac{(n-3)(n-1)(n+1)}{12} \end{aligned}$$

（ⅱ）nが偶数のとき

$a>b+c+d \Leftrightarrow a>n-a \Leftrightarrow a>\dfrac{n}{2}$となり、$a$は自然数より$a>\dfrac{n}{2}$

$a>b+c+d$ となる組み合わせの数は、$A=a-\dfrac{n}{2}$とおいて、

$A+b+c+d=\dfrac{n}{2}$となる自然数(A,b,c,d)組み合わせの数であるので、${}_{\frac{n}{2}-1}C_3$通り

同様に$b>c+d+a,\ c>d+a+b,\ d>a+b+c$となる組み合わせの数も${}_{\frac{n}{2}-1}C_3$通り

$a>b+c+d,\ b>c+d+a,\ c>d+a+b,\ d>a+b+c$となる条件は互いに排反である。

よって、求める組の個数は、$a+b+c+d=n$を満たす(a,b,c,d)の組み合わせの個数から

$a>b+c+d$または$b>c+d+a$または$c>d+a+b$または$d>a+b+c$を満たす

組み合わせの個数を引けば良いので、

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}C_3-4\cdot{}_{\frac{n}{2}-1}C_3 &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}-4\cdot\frac{\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-6}{2}}{6} \\
&= \frac{(n-2)(n^2+2n-18)}{12}
\end{aligned}
$$

（i）（ii）より $S(n)=\begin{cases}\dfrac{(n-3)(n-1)(n+1)}{12} & (n:\text{奇数}) \\ \dfrac{(n-2)(n^2+2n-18)}{12} & (n:\text{偶数})\end{cases}$