

${}_{999}C_n$ ($0 \leq n \leq 999$) が 3^m の倍数となる自然数 m の最大値とそれを与える n の個数をそれぞれ求めよ。

(解答)

$$a_k = {}_{999}C_k = \frac{999!}{k!(999-k)!} \text{ とおく。}$$

a_k が最大で 3 で何回割り切れるかについて調べる。

$$N! \text{ の } p \text{ の因子の個数を } v_p(N!) \text{ とすると、} v_p(N!) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{\log_{10} N}{\log_{10} p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{N}{p^i} \right\rfloor \text{ である。}$$

a_k が 3 の倍数になるような k の値について考える。

「 a_k が 3 の倍数」 $\Leftrightarrow$ 「 $v_3(999!) > v_3(k!) + v_3((999-k)!)$ 」である。

$$\begin{aligned} v_3(999!) &= \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{\log_{10} 999}{\log_{10} 3} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{999}{3^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{729} \right\rfloor \\ &= 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498 \end{aligned}$$

$$v_3(k!) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{\log_{10} 999}{\log_{10} 3} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{k}{3^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{729} \right\rfloor$$

$$\begin{aligned} v_3((999-k)!) &= \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{\log_{10}(999-k)}{\log_{10} 3} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{999-k}{3^i} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{999-k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{729} \right\rfloor \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} v_3(a_k) &= 498 - \left(\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{729} \right\rfloor \right) \\ &\quad - \left(\left\lfloor \frac{999-k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{729} \right\rfloor \right) \\ &= 498 - \left(\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{3} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{9} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{k}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{27} \right\rfloor \right) \\ &\quad - \left(\left\lfloor \frac{k}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{81} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{k}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{243} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{k}{729} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{729} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

ここで、

$999 = 3 \cdot 333$ より l_1 を負でない整数として、

$$k = 3l_1 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{3} \right\rfloor = 333 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$$k \neq 3l_1 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{3} \right\rfloor = 332 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$999 = 9 \cdot 111$ より l_2 を負でない整数として、

$$k = 9l_2 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{9} \right\rfloor = 111 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$$k \neq 9l_2 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{9} \right\rfloor = 110 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$999 = 27 \cdot 37$ より l_3 を負でない整数として、

$$k = 27l_3 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{27} \right\rfloor = 37 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$$k \neq 27l_3 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{27} \right\rfloor = 36 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$999 = 81 \cdot 12 + 27$ より l_4 を負でない整数として、

$$81l_4 \leq k \leq 81l_4 + 27 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{81} \right\rfloor = 12 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$$81l_4 + 28 \leq k \leq 81l_4 + 80 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{81} \right\rfloor = 11 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$999 = 243 \cdot 4 + 27$ より l_5 を負でない整数として、

$$243l_5 \leq k \leq 243l_5 + 27 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{243} \right\rfloor = 4 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$$243l_5 + 28 \leq k \leq 243l_5 + 242 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{243} \right\rfloor = 3 \quad (0 \leq k \leq 999)$$

$999 = 729 \cdot 1 + 270$ より

$$0 \leq k \leq 270 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{729} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{729} \right\rfloor = 1$$

$$271 \leq k \leq 728 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{729} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{729} \right\rfloor = 0$$

$$729 \leq k \leq 999 \text{ のとき } \left\lfloor \frac{k}{729} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999-k}{729} \right\rfloor = 1$$

より

$$v_3(a_k) \leq 498 - 332 - 110 - 36 - 11 - 3 - 0 = 6$$

である

等号が成立するのは、 $k \neq 3l_1$ かつ $k \neq 9l_2$ かつ $k \neq 27l_3$ かつ $81l_4 + 28 \leq k \leq 81l_4 + 80$ かつ

$243l_5 + 28 \leq k \leq 243l_5 + 242$ かつ $271 \leq k \leq 728$ のときである。

$k \neq 3l_1$ かつ $k \neq 9l_2$ かつ $k \neq 27l_3$ より $k \neq 3l_1$ である。

$81l_4 + 28 \leq k \leq 81l_4 + 80$ に該当するものは、 $3 \leq l_4 \leq 8$ であり、この中で3の倍数でないものは $81l_4 + 3l_6$ ($10 \leq l_6 \leq 26$) である。

$271 \leq k \leq 728$ の範囲において

$243l_5 + 28 \leq k \leq 243l_5 + 242$ に該当するものは、 $1 \leq l_5 \leq 2$ であり、

これは $81l_4 + 28 \leq k \leq 81l_4 + 80$ ($k \neq 81l_4 + 3l_6$) ($3 \leq l_4 \leq 8, 10 \leq l_6 \leq 26$) をすべて含んでいる。

よって、求める個数は、

$$(8 - 3 + 1) \cdot \{81l_4 + 80 - (81l_4 + 28) + 1 - (26 - 10 + 1)\} = 6 \cdot 36 = 216$$

以上、 ${}_{999}C_n$ ($0 \leq n \leq 999$) が 3^m の倍数となる自然数 m の最大値は6であり、それを与える n の個数は216