数学入試問題

制限時間：100 分

$\boxed{1}$　l,m,n を $l \le m \le n$ を満たす自然数とする。

（１）$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ を満たす自然数 (l,m,n) の組を全て求めよ。

（２）$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}<1$ を満たす自然数 (l,m,n) に対して、$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ の最大値を求めよ。

（３）$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}>1$ を満たす自然数 (l,m,n) に対して、$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ の最小値を求めよ。

（配点 50）

$\boxed{2}$　a,b,c,d は有理数、$\sqrt{k}\,(k=2,3,6)$ は無理数である。

（１）$a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$ であることを示せ。

（２）$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow a=b=c=d=0$ であることを示せ。

（３）$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^7=p\sqrt{2}+q\sqrt{3}+r\sqrt{6}+s$ を満たす自然数 $\left(p,q,r,s\right)$ の組は 1 組だけであることを証明せよ。

（４）（３）の r の値を求めよ。

（配点 50）

$\boxed{3}$　原点を O とする座標空間内に以下の 2 つの円錐 $C_1,\ C_2$ が存在する。

$$C_1 : x^2+y^2 \le (1-z)^2 \ (0 \le z \le 1)$$

$$C_2 : (x-1)^2+y^2 \le (1-z)^2 \ (0 \le z \le 1)$$

（１）C_1 と C_2 の共通部分を平面 $z=1-t$ で切ったときの断面を考える。2 つの円の交点を P,Q とし、$\angle POQ=2\theta$ とするとき、2 つの円の共通部分の面積 $S(\theta)$ を、θ の式で表せ。

（２）$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とおくとき、I_1, I_3 をそれぞれ求めよ。

（３）C_1 と C_2 の共通部分の体積 V を求めよ。

（配点 50）

$\boxed{4}$　a,b を実数とし、3次方程式 $x^3+ax+b=0$ の 3 つの解を α,β,γ とする。

（１）$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ とおくとき、D を、a,b を用いて表せ。

（２）D の値によって、$x^3+ax+b=0$ の解は次のように変化することを示せ。

（ｉ）$D>0$ のとき、異なる 3 つの実数解を持つ。

（ii）$D=0$ のとき、重解を持つ。

（iii）$D<0$ のとき、虚数解を持つ。

（配点 50）

（解答）

$\boxed{1}$

（１）$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}=\frac{3}{l}$ より、$\frac{3}{l}\geq 1$であるから、$l=1,2,3$

$l=1$のとき、$\frac{1}{1}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1\Leftrightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0$ より、不適。

よって、$l=2,3$

（ｉ）$l=2$のとき

$\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1\Leftrightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(m-2)(n-2)=4$

$(m-2,n-2)=(1,4),(2,2)\Leftrightarrow(m,n)=(3,6),(4,4)$

（ⅱ）$l=3$のとき

$\frac{1}{3}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1\Leftrightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}$

（ⅱ-ｉ）$m=3$のとき

$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow n=3$

（ⅱ-ⅱ）$m\geq 4$のとき

$n\leq 3$となり不適

よって、$(l,m,n)=(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3)$

（２）（１）より、

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}<1(n\geq 7)\cdots$①

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n}<1(n\geq 5)\cdots$②

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}<1(n\geq 4)\cdots$③

①の中で最も大きなものは、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$

②の中で最も大きなものは、$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$

③の中で最も大きなものは、$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

$\frac{11}{12}<\frac{19}{20}<\frac{41}{42}$ より、$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$は、$(l,m,n)=(2,3,7)$ のとき最大値$\frac{41}{42}$をとる。

（３）（１）より、

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}>1(n\leq 5)\cdots$①

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n}>1(n\leq 3)\cdots$②

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}>1(n\leq 2)\cdots$③

①の中で最も小さなものは、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$

②の中で最も小さなものは、$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12}$

③の中で最も小さなものは、$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

$\frac{31}{30}<\frac{13}{12}<\frac{7}{6}$ より、$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ は、$(l,m,n)=(2,3,5)$ のとき最小値 $\frac{31}{30}$ をとる。

$\boxed{2}$

（1）$a+b\sqrt{2}=0$ より、$b\neq 0$ のとき、$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$ となり、左辺が無理数、右辺が有理数となり、不適である。よって、$b=0$ であり、$a=0$ となる。逆に $a=b=0\Rightarrow a+b\sqrt{2}=0$ であるので、題意が成り立つ。

（2）$b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0\Leftrightarrow b=c=d=0$ をまず示す。
$b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0\Leftrightarrow b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=-d\sqrt{6}$ より、両辺を2乗して

$2b^2+3c^2+bc\sqrt{6}=6d^2\cdots$③

$bc\neq 0$ のとき、③より、$\sqrt{6}=\frac{6d^2-2b^2-3c^2}{bc}$ となり、左辺が無理数、右辺が有理数となり、不適である。よって、$bc=0$ である。

（ⅰ）$b=0$ のとき、$c+d\sqrt{2}=0\Leftrightarrow c=d=0$
（ⅱ）$c=0$ のとき、$b+d\sqrt{3}=0\Leftrightarrow b=d=0$
よって、（ⅰ）（ⅱ）より、$b=c=d=0$
逆に $b=c=d=0\Rightarrow b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0$ より、
$b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0\Leftrightarrow b=c=d=0$ が成り立つ。
よって、$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0\Leftrightarrow a=b=c=d=0$ が成り立つ。

（3）$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^7=p\sqrt{2}+q\sqrt{3}+r\sqrt{6}+s$ が他の自然数 (p',q',r',s') でも同様に成り立つとすると、$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^7=p'\sqrt{2}+q'\sqrt{3}+r'\sqrt{6}+s'$

よって、$p\sqrt{2}+q\sqrt{3}+r\sqrt{6}+s=p'\sqrt{2}+q'\sqrt{3}+r'\sqrt{6}+s'$

$$\Leftrightarrow (p-p')\sqrt{2}+(q-q')\sqrt{3}+(r-r')\sqrt{6}+(s-s')=0$$

（2）より、$p-p'=0,q-q'=0,r-r'=0,s-s'=0\Leftrightarrow p=p',q=q',r=r',s=s'$
よって、題意は示された。

（4）$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^7=\sum\frac{7!}{x!y!z!}\cdot 1^x\cdot(\sqrt{2})^y(\sqrt{3})^z\ (x+y+z=7,x,y,z\geq 0)$

$\sqrt{6}$ が出てくるのは、$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ が奇数回ずつ出てくるときであるので、

$(x,y,z)=(1,1,5),(1,3,3),(1,5,1),(3,1,3),(3,3,1),(5,1,1)$ であるので、

$$r\sqrt{6}=\frac{7!}{1!1!5!}\cdot1^1\cdot(\sqrt{2})^1\cdot(\sqrt{3})^5+\frac{7!}{1!3!3!}\cdot1^1\cdot(\sqrt{2})^3\cdot(\sqrt{3})^3$$

$$+\frac{7!}{1!5!1!}\cdot1^1\cdot(\sqrt{2})^5\cdot(\sqrt{3})^1+\frac{7!}{3!1!3!}\cdot1^3\cdot(\sqrt{2})^1\cdot(\sqrt{3})^3$$

$$+\frac{7!}{3!3!1!}\cdot1^3\cdot(\sqrt{2})^3\cdot(\sqrt{3})^1+\frac{7!}{5!1!1!}\cdot1^5\cdot(\sqrt{2})^1\cdot(\sqrt{3})^1$$

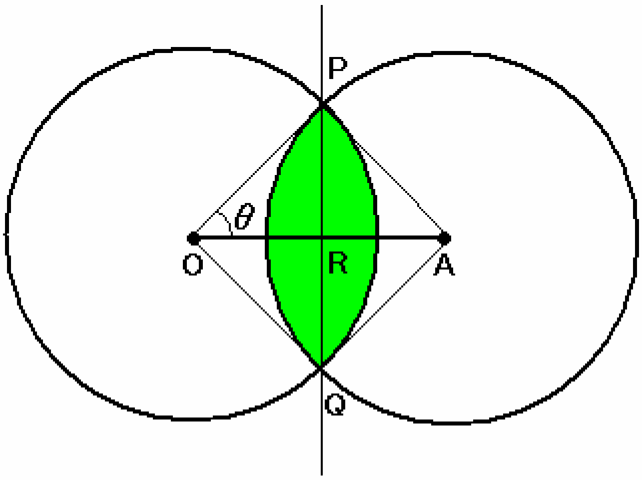
$$=(378+840+168+420+280+42)\sqrt{6}$$

よって、$r=2128$である。

$\boxed{3}$

（1） $z=1-t$による平面で切った切り口の断面は円C_1:$x^2+y^2\leq t^2$と円C_2: $(x-1)^2+y^2\leq t^2$の共通部分であるので、(円と円の中心間距離) ≦ (円の半径の和) $\Leftrightarrow 1\leq 2t$より、で$\frac{1}{2}\leq t\leq 1$のみ存在し、その切り口は以下の図の緑色の部分である。

図のように点を設定する。



$OA=1$より、$OR=\frac{1}{2}$

$OP=t$より、$t\cos\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2\cos\theta}$

$S(\theta)=$（扇形OPQ）＋（扇形APQ）－（四角形$OPAQ$）より、

$$S(\theta)=\frac{1}{2}t^2\cdot2\theta+\frac{1}{2}t^2\cdot2\theta-t^2\sin2\theta=t^2(2\theta-\sin2\theta)=\frac{\theta}{2\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

（2） $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$

$u=\sin\theta$とおくと、$du=\cos\theta d\theta,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 0\leq u\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$より、

$$I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\log(2+\sqrt{3})$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\tan\theta)'}{\cos\theta}d\theta=\left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\tan\theta d\theta=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=2\sqrt{3}-(I_3-I_1)$$

よって、$I_3=\sqrt{3}-\frac{1}{2}I_1=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$

（3） $t=\frac{1}{2\cos\theta}\Leftrightarrow dt=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta,\frac{1}{2}\le t\le 1\Leftrightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ より、

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}S(\theta)d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta,\ J_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$ とおくと、

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cdot\left(\frac{1}{3\cos^3\theta}\right)'d\theta=\left[\theta\cdot\left(\frac{1}{3\cos^3\theta}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}=\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3$$

$$=\frac{8}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{6}\log(2+\sqrt{3})$$

$$J_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta=I_3-I_1=\sqrt{3}-\frac{3}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

$$V=\frac{1}{4}(J_1-J_2)=\frac{2}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{5}{12}\log(2+\sqrt{3})$$

$\boxed{4}$

（1） $\alpha+\beta+\gamma=0,\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p,\alpha\beta\gamma=-q$ より、

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)=-\left\{\beta^2-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma\right\}$$

$$=-\left\{\beta^2+\beta^2+p-\beta(\alpha+\gamma)\right\}$$

$$=-(\beta^2+\beta^2+p+\beta^2)$$

$$=-(3\beta^2+p)$$

同様にして、

$$(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=-(3\gamma^2+p)$$

$(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=-(3\alpha^2+p)$

より、

$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=-(3\alpha^2+p)(3\beta^2+p)(3\gamma^2+p)$

$=-\left\{p^3+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)p^2+9(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)p+27\alpha^2\beta^2\gamma^2\right\}$

$=-\left[p^3+3\left\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\}+9\left\{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\right\}+27q^2\right]$

$=-\left\{p^3+3\cdot(-2p)p^2+9\cdot(p^2)p+27q^2\right\}$

$=-(4p^3+27q^2)$

（２）

（ｉ）α,β,γ が異なる実数のとき、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2>0$ であり、

逆に、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2>0$ のとき、α,β,γ は異なる実数であるので異なる3つの実数解を持つ。

（ii）α,β,γ のどれか2つ以上が等しいと $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=0$ であり、

逆に、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=0$ のとき、$\alpha=\beta$ または $\beta=\gamma$ または $\gamma=\alpha$ であるので重解を持つ。

（iii）α を実数、β と γ を虚数とおくと、$\gamma=\overline{\beta}$ より、

$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=(\beta-\overline{\beta})^2\{(\alpha-\beta)(\overline{\beta}-\alpha)\}^2$

$=(\beta-\overline{\beta})^2\{-(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\alpha)\}^2$

$=(\beta-\overline{\beta})^2\{-(\beta-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})\}^2$

ここで $\beta-\overline{\beta}$ は純虚数であるので、$(\beta-\overline{\beta})^2<0$ であり、$-(\beta-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})$ は実数であるので $\{-(\beta-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})\}^2>0$、よって、$D<0$ となる。逆に $D<0$ となるのは $(\beta-\overline{\beta})^2<0$ となる虚数 $\beta,\overline{\beta}$ が存在するときのみであるので、虚数解を持つ。