

システム制御情報チュートリアル講座 2001

「制御の20世紀/21世紀の展望」

## 最近の制御理論の常識と非常識

池田 雅夫

大阪大学

## 1. はじめに

ある分野で常識とされていることが，もっと広い視野から見ると妥当でないことも多い．

## 2. 非線形システムの安定性

非線形システムに対して，「システムが漸近安定」という記述は不明確かつ不適切．

## 3. 非線形システムのゲイン

非線形システムの入出力関係を線形特性のように評価するのは不適切．非線形特性として把握すべき．

## 4. 非線形システムの表現

非線形システムを状態方程式で記述することは容易でない．  
ディスクリプタ表現に基づく解析・設計理論が必要．

## 5. 数式モデルを用いない解析と制御

制御の原点に戻れば，状態方程式や伝達関数を用いない  
数理的制御理論も考えられる．

## 6. おわりに

常識とされている問題設定の枠組を鵜呑みにせず，自分で  
納得できる枠組を構築するという姿勢が大切．

# 1. はじめに

制御理論：20世紀後半に非常に発展

特に最近20年間は、**線形時不変システム**を対象に発展



多くの人々の頭の中：線形時不変システムに対する常識の刷り込み



その常識で非線形システムが取り扱われる傾向 (適切か?)

制御理論：**状態方程式**や**伝達関数表現**を用いて発展



多くの人々の頭の中：数理的制御理論は数式モデルを使うもの

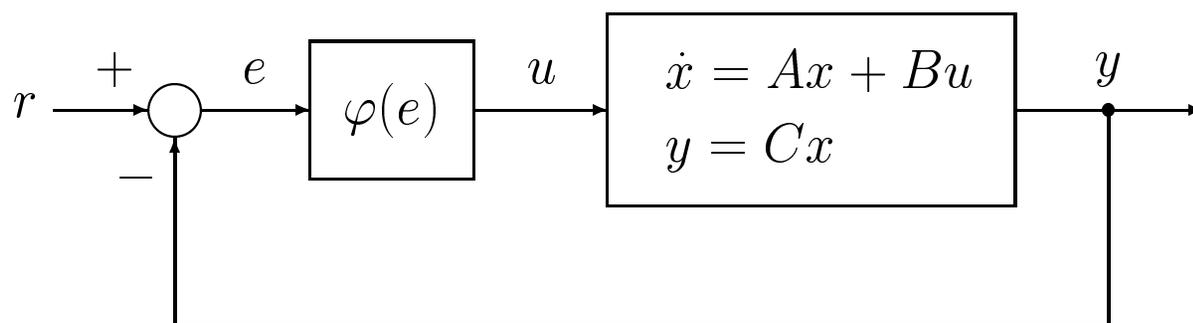


数理的制御理論にはモデル以外は考えられないという常識 (正しいか?)

常識から離れて考えると、解くべき重要な問題が山積

## 2. 非線形システムの安定性

よく使われている「システムが漸近安定」とは、どういう意味？



非線形フィードバック系

$r(t) \equiv 0$  のとき，任意の初期状態  $x(0)$  に対する振る舞いが  $x(t) \rightarrow 0$ ， $t \rightarrow \infty$  になるということ？

ただし， $\varphi(0) = 0$  と仮定している．

これは「システムの平衡状態  $x = 0$  は漸近安定」というべき

漸近安定性とは，本来，微分方程式の解に対して定義された語

微分方程式

$$\dot{x}(t) = f \{x(t), u(t), t\}, \quad u: \text{外生信号}$$

のある  $u(\cdot)$  によって決まる解  $x^*(\cdot)$  に対して定義される．

偏差系

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f \{\tilde{x}(t) + x^*(t), u(t), t\} - f \{x^*(t), u(t), t\}$$

$$\tilde{x} = x - x^*$$

の振る舞いが  $\tilde{x} = 0$  に漸近，すなわち， $\tilde{x}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ．ただし，初期値  $\tilde{x}(0)$  は 0 の近傍．

漸近安定性は解ごとに異なる．

外生信号  $u(\cdot)$  に依存．

非線形システムについて安定性を述べるには，  
どの解についての議論か明示する必要がある．

外生信号を明示する必要

## 線形システムの場合

簡単のため，時不変システムを考える．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

ある初期状態  $x^*(0)$  と入力  $u(t)$  によって決まる解

$$x^*(t) = e^{At}x^*(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

別の初期状態  $x(0)$  と同じ入力  $u(t)$  によって決まる解

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

偏差

$$x(t) - x^*(t) = e^{At} \{x(0) - x^*(0)\}$$

偏差  $x(t) - x^*(t) = e^{At} \{x(0) - x^*(0)\}$

$$x(t) - x^*(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$



$A$  のすべての固有値の実部が負

漸近安定性は外生信号  $u(\cdot)$  に依存しない。

ある解が漸近安定なら，すべての解が漸近安定。



どの解を考えているか，明示する必要がない。



「システムが漸近安定」という不適切な言い方の  
曖昧さが表に現われない。

線形システムだけの性質

安定性については，解のなかでも特に平衡点（定値の解）の安定性に注目することが多い．

## 非線形システムの場合

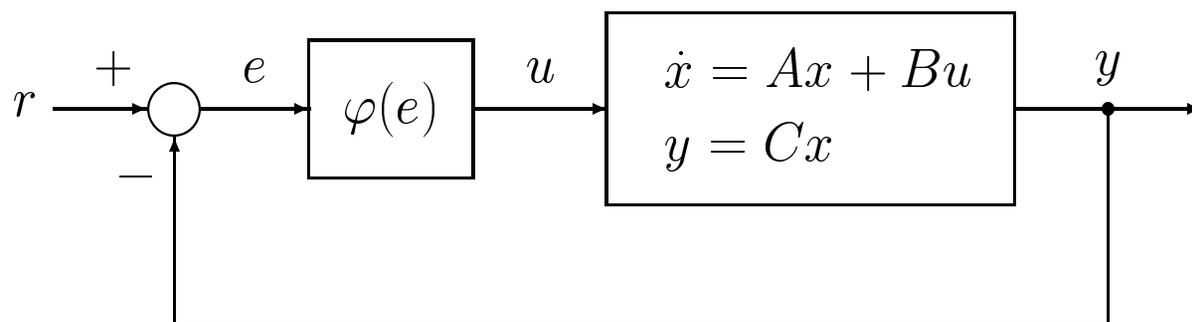
- 平衡点が複数の場合や，0 の場合がある．
- 定値外生信号やパラメータの変化により，平衡点の数が変わることがある．
- 定値外生信号やパラメータの変化により，平衡点の安定性が変わることがある．

非線形システムの安定性を考える場合，これらを考慮する必要あり

非線形システムに対して「**パラメトリック安定性**」という  
概念を講演者らは提唱 参考文献 [3] ~ [6]

パラメータ（外生信号を含む）の変化のもとでも平衡点は唯一  
その平衡点は大域漸近安定

## 外生信号によって，平衡点の漸近安定性が変わる例



### 線形部

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3.5 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1.9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 非線形部

$$\varphi(e) = \begin{cases} 9e, & e \leq 1, \\ 12e - 3, & 1 < e \leq \frac{65}{64}, \\ 9e + \frac{3}{64}, & \frac{65}{64} < e \end{cases}$$

$r(t) \equiv 0$  のとき

平衡解

$$x(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0 : \quad \text{大域漸近安定}$$

Popov の安定条件より

$r(t) \equiv 9.7$  のとき

平衡解

$$x(t) \equiv \begin{bmatrix} \frac{567}{124} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e(t) \equiv \frac{251}{248}, \quad u(t) \equiv \frac{567}{62} : \quad \text{漸近安定でない}$$

Lyapunov の第 1 の方法により

線形システムに対しては、**漸近安定性**はシステムの性質であるということもできる。

線形システム理論から勉強を始めた人は、  
非線形システムに対しても、**漸近安定性はシステムの性質**と考えている。

そして、  
厳密な共通理解なしに「**システムが漸近安定**」という記述を使っている。

もともとシステムの性質として定義された**入出力安定性 (有界入力有界出力安定性)** は、入力と出力の大きさを 0 を基準に測っている。

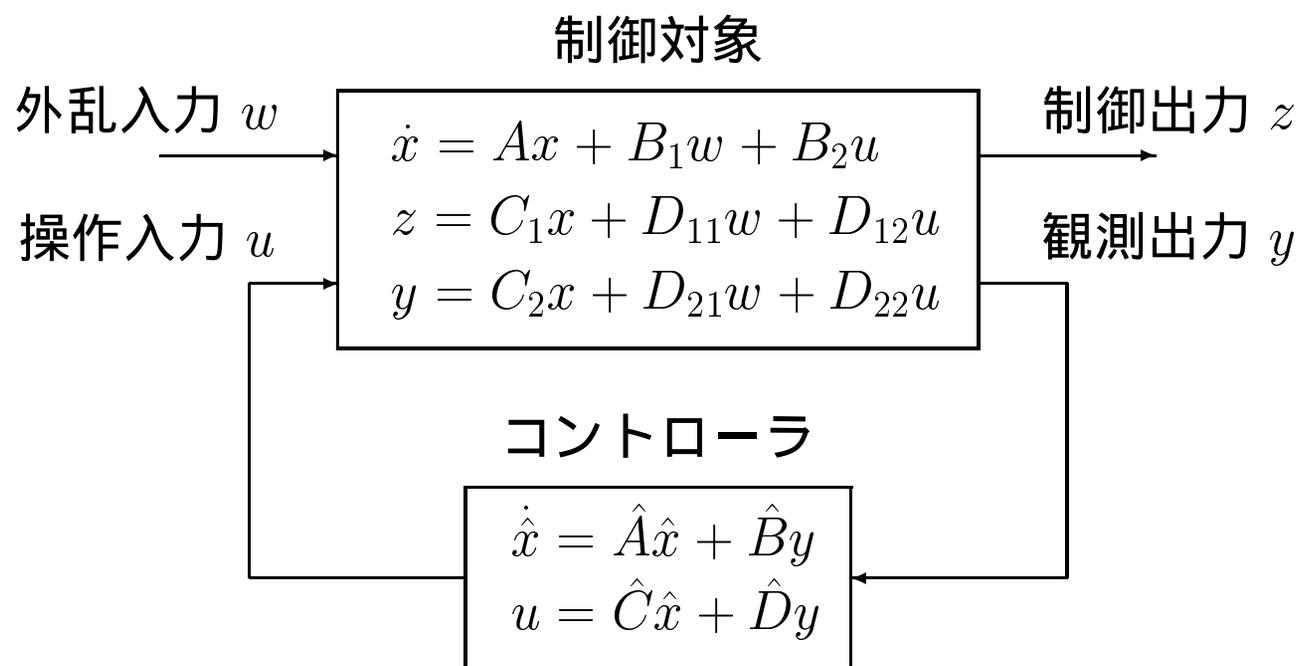
したがって、  
ある一定値のまわりで入力が有界変動する場合の安定性までは保証していない。

### 3. 非線形システムのゲイン

20世紀の最後の20年：制御理論が大きく発展

$H_\infty$  制御理論が中心

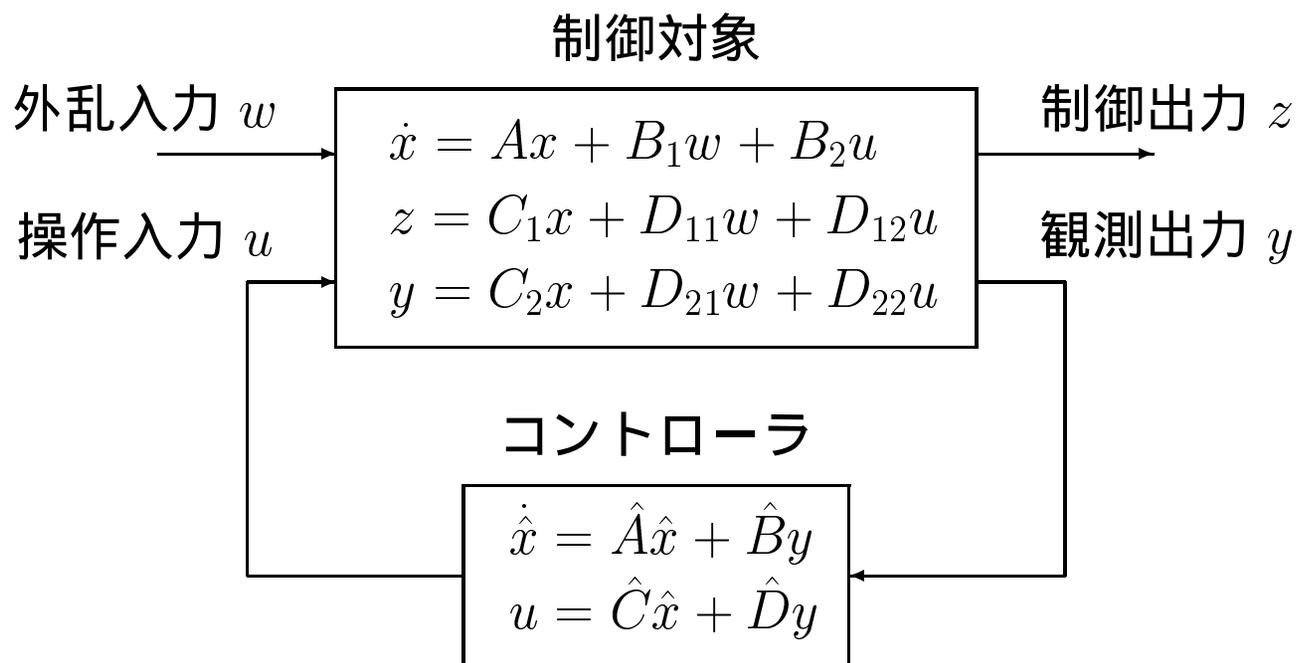
$H_\infty$  制御理論



フィードバック制御系

線形システムに対する1つの制御系設計論として完成

## $H_\infty$ 制御



$w$  から  $z$  への伝達関数 :  $G_{zw}(s)$  (安定とする)

$G_{zw}(s)$  の  $H_\infty$  ノルム :  $\|G_{zw}(s)\|_\infty \triangleq \sup_\omega \bar{\sigma}\{G_{zw}(i\omega)\}$ ,  $\bar{\sigma}$  : 最大特異値

**制御仕様** : 閉ループ系の安定性

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma, \quad \gamma : \text{指定された正数}$$

周波数領域の制御仕様： $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$

$\Updownarrow$

時間領域の制御仕様： $\left(\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt\right)^{1/2} < \gamma \left(\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt\right)^{1/2}$

$w$ ：2乗可積分 ( $L_2$ ) 信号 ( $\neq 0$ )

伝達関数が定義できない時変システム，非線形システムに対して適用可

$\Rightarrow$  非線形システムに対しても線形評価が当然という常識

しかし，非線形システムに対してなら，

$$\left(\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt\right)^{1/2} < g \left\{ \left(\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt\right)^{1/2} \right\}$$

$g(\cdot)$ ：単調非減少関数  $[0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$

のような非線形評価を考えるほうが適切ではないだろうか。

## 2乗可積分関数のノルム ( $L_2$ ノルム)

$$\|w\|_2 = \left( \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \right)^{1/2}$$

$\|w\|_2$  の2乗： システムに加わるエネルギーと理解

定値関数や正弦波関数は2乗可積分ではない。



エネルギーより平均パワーを考えるほうが適切ではないか。

## 平均パワーの平方根 (ノルムではない)

$$|w| \triangleq \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t w^T(\tau)w(\tau)d\tau \right)^{1/2}$$

$|w|$  の2乗： システムに加わる平均パワーと理解

$|w|$  はノルムではない .

$$|w| = 0 \not\Rightarrow w(t) \equiv 0$$

ノルムの他の性質は満たす .

(i)  $|w| \geq 0$

(ii)  $|\alpha w| = |\alpha| |w| > 0, \quad \forall \alpha : \text{実数}$

(iii)  $|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2|$

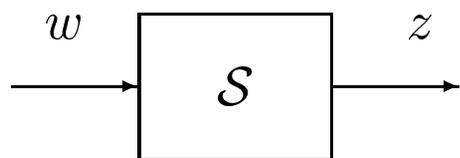
線形システムの特性評価に関しては ,  $\|\cdot\|_2$  と  $|\cdot|$  は同等

$\|\cdot\|_2$  より  $|\cdot|$  のほうが非線形特性を反映する .

以下の例

## 非線形システムの入出力関係

$z = \mathcal{S}w$ ,  $w$ : 入力,  $z$ : 出力,  $\mathcal{S}$ : 因果的作用素



### 信号の大きさの測り方

$L_2$  ノルム:  $\|w\|_2 = \left( \int_0^\infty w^T(\tau) w(\tau) d\tau \right)^{1/2}$

平均パワーの平方根:  $|w| = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau \right)^{1/2}$

### 非線形評価を考える .

$$\|z\|_2 \leq g(\|w\|_2), \quad \forall w, \|w\|_2 < \infty$$

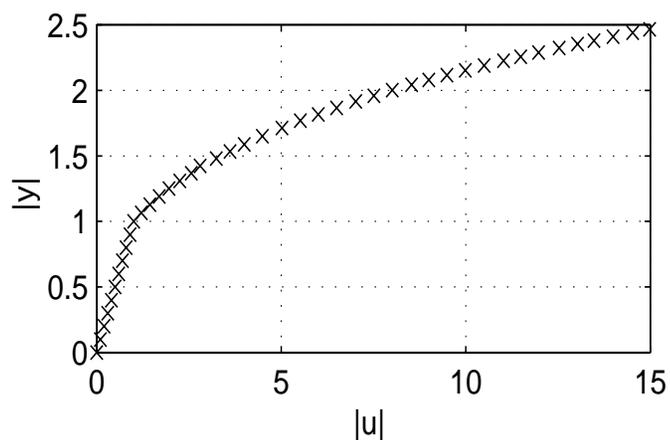
$$|z| \leq g(|w|), \quad \forall w, |w| < \infty$$

## 例

$$\mathcal{S} : \dot{x} = f(x) + w, \quad z = x, \quad x, w, z \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & |x| \leq 1 \\ -x^3, & |x| > 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0$$

シミュレーション：各々の  $|w| < \infty$  に対する  $|z|$  の最大値のプロット



$$|z| \leq g(|w|),$$

注意： $\|z\|_2 \leq \|w\|_2$

$$g(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \alpha^{1/3}, & 1 < \alpha \end{cases}$$

$$\mathcal{S} : \quad \dot{x} = f(x) + w, \quad z = x, \quad x, w, z \in R$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & |x| \leq 1 \\ -x^3, & |x| > 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0$$

- $\{w : \|w\| = M\}$  の集合のなかでは,  $w(t) = M, \forall t$  が  $\|z\|$  の最大値を発生する .

$\|w\|$  が大きいとき , システムは非線形部で動作する .

$$\|z\| \leq g(\|w\|), \quad g(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \alpha^{1/3}, & 1 < \alpha \end{cases}$$

- $\{w : \|w\|_2 = M\}$  の集合のなかでは,  $w(t) = \varepsilon, 0 \leq t \leq (M/\varepsilon)^2$  が  $\|z\|_2$  の最大値を発生する . ただし ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  .

$\|w\|_2$  が大きいことが必ずしも , 非線形部での動作を意味しない .

$$\|z\|_2 \leq \|w\|_2 \quad (\text{線形部のゲインが全体の中で最大})$$

## 線形システムの場合

$$|z| \leq \gamma |w|, \quad \forall w, |w| < \infty \iff \|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w, \|w\|_2 < \infty$$

## 非線形システムの場合

$$|z| \leq \gamma |w|, \quad \forall w, |w| < \infty \iff \|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w, \|w\|_2 < \infty$$

$$|z| \leq g(|w|), \quad \forall w, |w| < \infty \not\iff \|z\|_2 \leq g(\|w\|_2), \quad \forall w, \|w\|_2 < \infty$$

平均パワーの平方根で信号の大きさを測るほうが、 $L_2$  ノルムで測るより非線形システムの解析には適しているのではないか。

いつでも？

$$\mathcal{S}: \quad \dot{x} = f(x) + w, \quad z = x, \quad x, w, z \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & |x| \leq 1 \\ -x^{1/3}, & |x| > 1 \end{cases}$$

## 平均パワーの平方根に基づくゲインの計算法

状態方程式に入力が線形に現われる非線形システム

$$\mathcal{S} : \dot{x} = f(x) + G(x)w, \quad z = h(x)$$

$x \in R^n$  : 状態,  $w \in R^m$  : 入力,  $z \in R^p$  : 出力

$$x(0) = 0$$

$$f(\cdot) : R^n \rightarrow R^n, \quad f(0) = 0$$

$$G(\cdot) : R^n \rightarrow R^{n \times m}$$

$$h(\cdot) : R^n \rightarrow R^p, \quad h(0) = 0$$

## 定理

ある  $\gamma > 0$  と  $\delta \geq 0$  について，下の3つの条件を満たす領域  $\Omega$  が状態空間  $R^n$  に存在すれば，システム  $S$  の入力  $w$  と出力  $z$  について，

$$|z| \leq \gamma|w| + \delta, \quad \forall w, |w| < \infty$$

が成立する．

1. 領域  $\Omega$  において，ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} G G^T \frac{\partial \phi}{\partial x} + h^T h = 0,$$

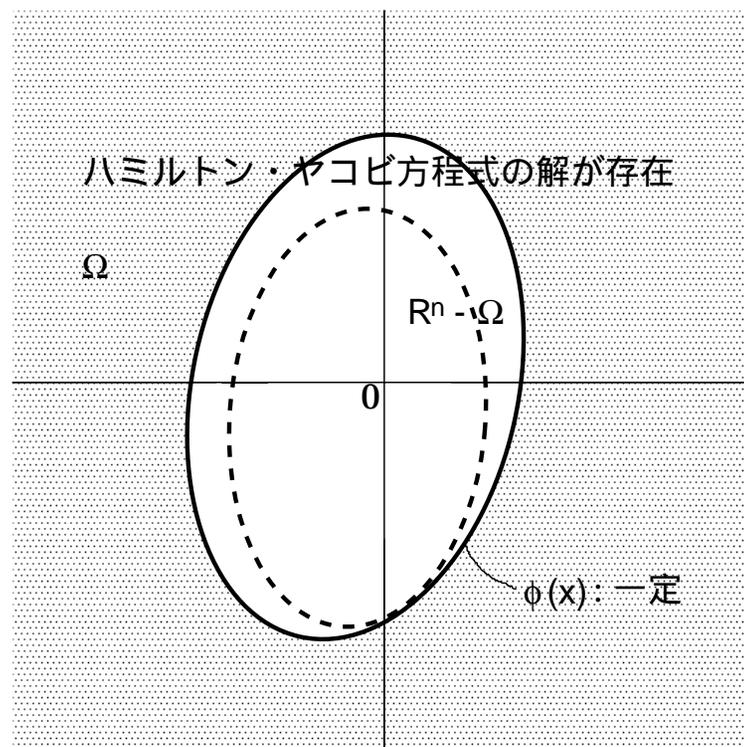
を満たす実数値関数  $\phi(x)$  が存在する．

2. 領域  $R^n - \Omega$  において，次の条件が成立する．

$$h^T(x)h(x) \leq \delta^2,$$

3. 領域  $\Omega$  と領域  $R^n - \Omega$  の境界において， $\phi(x)$  は一定値をとる．また， $\Omega$  における  $\phi(x)$  の値は，その境界上の値より小さくない．

## 定理の条件のイメージ



領域  $\Omega \subseteq$  ハミルトン・ヤコビ方程式の解が存在する領域 (破線の外側)

ハミルトン・ヤコビ方程式の解が存在する領域の中で  $\phi(x)$  の値が一定である点の集合 (実線) =  $\Omega$  と  $R^n - \Omega$  の境界

## 例

$$\mathcal{S} : \quad \dot{x} = f(x) + w, \quad z = x, \quad x, w, z \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & |x| \leq 1 \\ -x^3, & |x| > 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0$$

$\gamma \geq 1$  に対して,  $|z| \leq \gamma|w|$

- $|x| \leq 1$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{1}{4\gamma^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + x^2 = 0, \quad \phi(x) = \left( \gamma^2 + \gamma \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) x^2$$

- $|x| > 1$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} x^3 + \frac{1}{4\gamma^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + x^2 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2\gamma^2 x^3 + 2\gamma x \sqrt{\gamma^2 x^4 - 1}, \quad \phi(\pm 1) = \left( \gamma^2 + \gamma \sqrt{\gamma^2 - 1} \right)$$

$0 < \gamma < 1$  に対して,  $|z| \leq \gamma|w| + 1/\sqrt{\gamma}$

- $|x| \leq 1$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x}x + \frac{1}{4\gamma^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + x^2 = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \left(2\gamma^2 \pm 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}\right)x, \quad \text{実数値関数の解は存在しない}$$

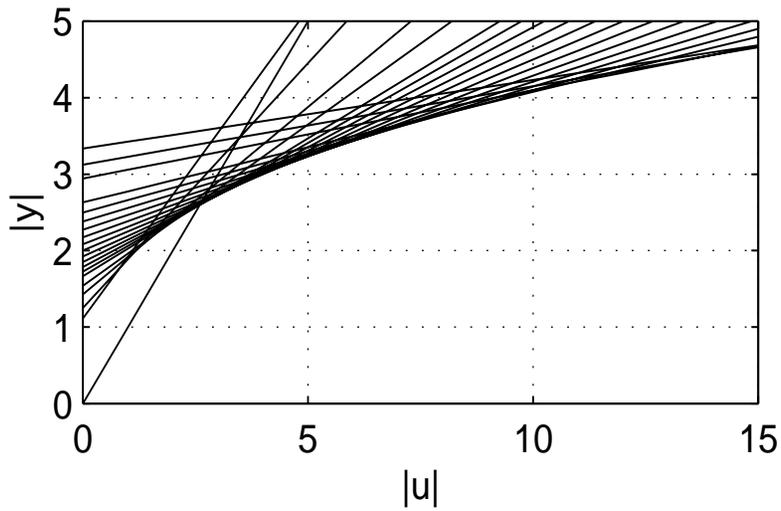
- $|x| > 1$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x}x^3 + \frac{1}{4\gamma^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + x^2 = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2\gamma^2x^3 + 2\gamma x\sqrt{\gamma^2x^4 - 1} \quad \text{領域 } \Omega = \{x : x^2 > 1/\gamma\} \text{ で解が存在}$$

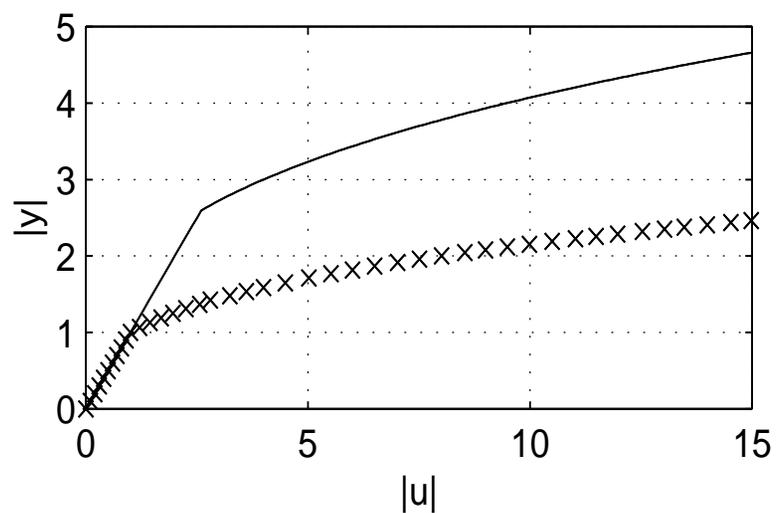
$$|h(x)|^2 = x^2 \leq (1/\sqrt{\gamma})^2 \quad \text{領域 } R - \Omega = \{x : x^2 \leq 1/\gamma\} \text{ において成立}$$

$$|z| \leq \begin{cases} \gamma|w| + 1/\sqrt{\gamma}, & 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \gamma|w|, & 1 \leq \gamma \end{cases}$$



$$|z| \leq \begin{cases} |w|, & |w| \leq \{0.25^{1/3} + 2^{1/3}\}^{3/2} \\ \{0.25^{1/3} + 2^{1/3}\} |w|^{1/3}, & |w| > \{0.25^{1/3} + 2^{1/3}\}^{3/2} \end{cases}$$

## 計算結果とシミュレーションの比較

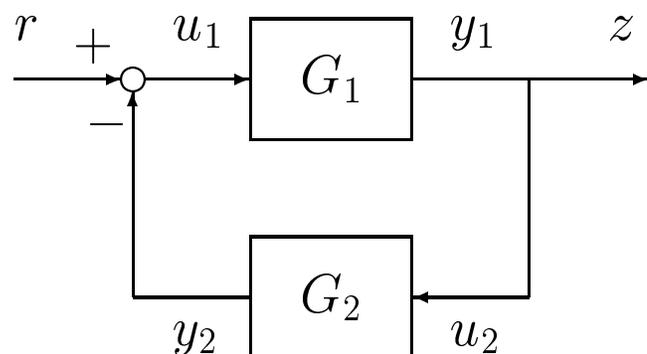


実線： 計算結果

××××： シミュレーション

## スモールゲイン定理 (従来)

### フィードバック系



### ブロックが結合していないとき

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \|u_1\| + \beta_1, \quad \forall u_1, \|u_1\| < \infty$$

$$\|y_2\| \leq \gamma_2 \|u_2\| + \beta_2, \quad \forall u_2, \|u_2\| < \infty$$

$$\gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad \beta_1, \beta_2 \geq 0$$

もし

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1$$

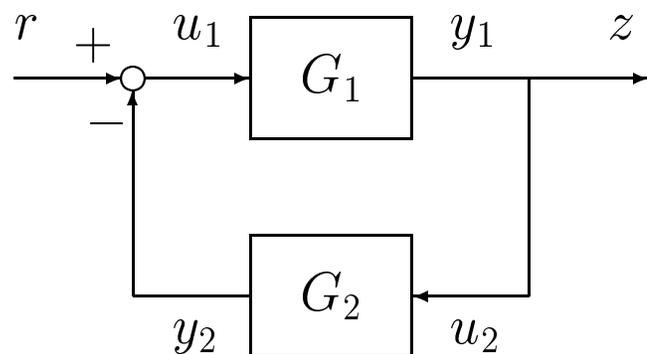
ならば, 入力  $r$  と出力  $z$  について,

$$\|z\| \leq (1 - \gamma_1 \gamma_2)^{-1} \gamma_1 \|r\| + (1 - \gamma_1 \gamma_2)^{-1} (\gamma_1 \beta_2 + \beta_1)$$

が成立する.

# 非線形スモールゲイン定理

## フィードバック系



## ブロックが結合していないとき

$$|y_1| \leq g_1(|u_1|), \quad \forall u_1, |u_1| < \infty$$

$$|y_2| \leq g_2(|u_2|), \quad \forall u_2, |u_2| < \infty$$

$g_i$  ( $i = 1, 2$ ): 単調非減少関数

$$(g_i(0) = 0)$$

もし

$$\alpha - g_2\{g_1(\alpha)\} > p(\alpha) \geq 0, \quad \forall \alpha \geq 0$$

が成立するような単調増加関数  $p(\alpha)$  で,  $\alpha \rightarrow \infty$  のとき  $p(\alpha) \rightarrow \infty$  となるものが存在するならば, 入力  $r$  と出力  $z$  について,

$$|z| < g_1\{p^{-1}(|r|)\}$$

が成立する.

例

$G_1$  : 先に考えた  $S$

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \leq \{0.25^{1/3} + 2^{1/3}\}^{3/2} \\ \{0.25^{1/3} + 2^{1/3}\} \alpha^{1/3}, & \alpha > \{0.25^{1/3} + 2^{1/3}\}^{3/2} \end{cases}$$

$G_2$  : 次の特性をもつシステム

$$g_2(\alpha) = \begin{cases} 0.5\alpha, & 0 \leq \alpha \leq 3 \\ 2\alpha - 4.5, & 3 < \alpha \end{cases}$$

このとき , 非負の単調増加関数

$$p(\alpha) = \begin{cases} 0.5\alpha, & 0 \leq \alpha \leq 3 \\ \alpha - 4\alpha^{1/3} + 4 \cdot 3^{1/3} - 1.5, & 3 < \alpha \end{cases}$$

に対して**非線形スモールゲイン定理**の条件が成立し , したがって ,

$$|z| \leq g_1 \{p^{-1}(|r|)\} \leq 2|r|$$

**注意:** 従来のスモールゲイン定理の条件は満たされない .  $\gamma_1 = 1$  ,  $\gamma_2 = 2$

## 補足

$L_2$  ノルム :  $\left( \int_0^\infty |w(t)|^2 dt \right)^{1/2}$  (ただし,  $|\cdot|$  はベクトルノルム)

非線形特性の抽出には向かない.

(ノルムが大きいことが振幅が大きいことを意味しない.)

$L_1$  ノルム :  $\int_0^\infty |w(t)| dt$  (ただし,  $|\cdot|$  はベクトルノルム)

非線形特性の抽出には向かない.

(ノルムが大きいことが振幅が大きいことを意味しない.)

$L_\infty$  ノルム :  $\sup_{0 \leq t < \infty} |w(t)|$  (ただし,  $|\cdot|$  はベクトルノルム)

非線形特性を抽出する.

$L_\infty$  ノルムに基づくスモールゲイン定理 (参考文献 [16])

## 4. 非線形システムの表現

1960年以降：制御理論が大きく発展

状態方程式の導入が貢献

状態はシステムの過去の履歴が将来の振る舞いに与える情報を必要十分にもつ。

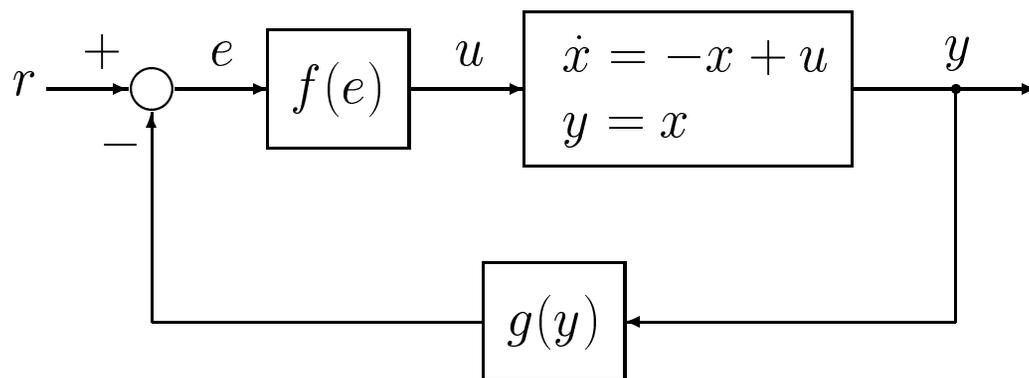
非線形システムに対しても，状態方程式で議論をすることが常識

しかし，

- 状態方程式を求めることは容易か？
- 形式上求まっても，解析・設計に使えるものなのか？
- 導出過程で何か情報は失われないか？

問題点の指摘とディスクリプタ方程式の使用による解決

# 例 1



## 非線形フィードバック系

ループをたどって得られる

$$u = f \{ r - g(x) \}$$

を線形部に代入することにより、**状態方程式の形**

$$\dot{x} = -x + f \{ r - g(x) \}, \quad y = x$$

**に記述**できる。

この状態方程式は解析・設計に使えるか？

$$\dot{x} = -x + f \{r - g(x)\}, \quad y = x$$

たとえば，

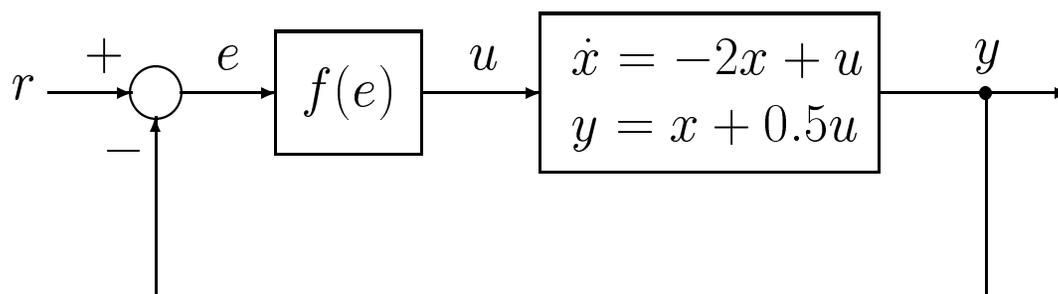
$$f(e) = \begin{cases} -1, & e < -1 \\ e, & -1 \leq e \leq 2 \\ 2, & 2 < e \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} -2\sqrt{-10y} + 10, & y < -10 \\ y, & -10 \leq y \leq 10 \\ 2\sqrt{10y} - 10, & 10 < y \end{cases}$$

のような簡単な非線形であっても， $f \{r - g(x)\}$  の項を具体的に記述することは困難．

状態方程式の形に記述できることと，解析・設計に使えることは異なる．

## 例2



非線形フィードバック系

静的なループが存在

$$u = f(r - x - 0.5u)$$

これを  $u$  について解いて

$$u = g(x, r)$$

とおき，線形部に代入すると，状態方程式の形

$$\dot{x} = -2x + g(x, r), \quad y = x + 0.5g(x, r)$$

に記述できる．

しかし， $u = f(r - x - 0.5u)$  を解くことは困難

非線形システムにおいて状態方程式を導出するには,

- 非線形特性を含む静的ループが存在する場合  
非線形代数方程式を解かなければならない
- 非線形特性をループ内に複数含む場合  
結合した特性を求めなければならない

非常に困難, または, ほとんど不可能

状態方程式表現を用いるという解析・設計の前提が成り立たない

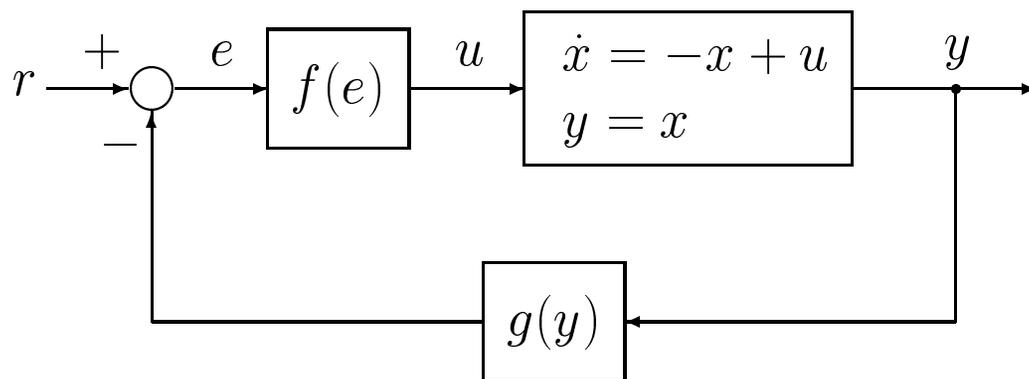
解決策: ディスクリプタ方程式の使用

$$E\dot{\xi} = \mathcal{F}(\xi, v), \quad \psi = \mathcal{H}(\xi)$$

$\xi$ : ディスクリプタ変数,  $v$ : 入力,  $\psi$ : 出力

$E$ : 定数行列,  $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ : 非線形関数

# 例1



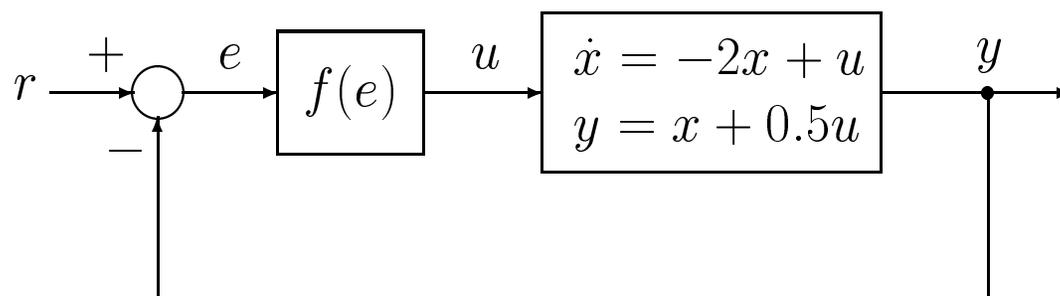
## ディסקリプタ方程式表現

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = F \left( \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

ただし,

$$F \left( \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -x + f(e) \\ -g(x) - e \end{bmatrix}$$

## 例2



### ディスクリプタ方程式表現

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = F \left( \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad y = H \left( \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \right)$$

ただし,

$$F \left( \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2x + f(e) \\ -x - e - 0.5f(e) \end{bmatrix}, \quad H \left( \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \right) = x + 0.5f(e)$$

## ディסקリプタ方程式に基づく安定解析の例

リアプノフ関数の候補： $x^2$

例1の解に沿った $x^2$ の微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x^2 &= 2x\dot{x} = 2x\{-x + f(e)\} \\ &= -2x\{x - f(e)\} - 2e\{e + g(x)\} \\ &= -\{x - f(e)\}^2 - \{e + g(x)\}^2 - \{x^2 - g^2(x)\} - \{e^2 - f^2(e)\} \\ &< 0, \quad x \neq 0 \text{ または } e \neq 0 \text{ のとき}\end{aligned}$$

したがって,  $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

平衡状態  $x = 0$  は大域漸近安定

注意： $e + g(x) = 0$  (ディスクリプタ方程式の代数方程式部分)

$$f(e) = \begin{cases} -1, & e < -1 \\ e, & -1 \leq e \leq 2 \\ 2, & 2 < e \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-10x} + 10, & x < -10 \\ x, & -10 \leq x \leq 10 \\ 2\sqrt{10x} - 10, & 10 < x \end{cases}$$

## 例2の解に沿った $x^2$ の微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x^2 &= 2x\dot{x} = 2x\{-2x + f(e)\} \\ &= -2x\{2x - f(e)\} - 2e\{e + x + 0.5f(e)\} \\ &= -\{x - f(e)\}^2 - \{e + x\}^2 - 2x^2 - \{e^2 - f^2(e)\} - ef(e) \\ &< 0, \quad x \neq 0 \text{ または } e \neq 0 \text{ のとき}\end{aligned}$$

したがって,  $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

平衡状態  $x = 0$  は大域漸近安定

注意:  $e + x + 0.5f(e) = 0$  (ディスクリプタ方程式の代数方程式部分)

$$f(e) = \begin{cases} -1, & e < -1 \\ e, & -1 \leq e \leq 2 \\ 2, & 2 < e \end{cases}$$

## ディスクリプタ方程式表現に基づく解析・設計が優れている点

- 個々の非線形特性をそのまま用いることができる。
- 非線形特性が不確かさを含んでいても容易に扱うことができる。

講演者らは、一般の非線形ディスクリプタシステムに対する  
安定解析法，安定化制御法などを開発中

非線形ディスクリプタ方程式に対するその他の研究については，  
参考文献[20]を参照

## 5. 数式モデルを用いない解析と制御

制御理論の常識：動的システムは数式モデルで表す。

伝達関数や状態方程式など

数式モデルの求め方 (モデリング)

- システム内部で成立している物理的・化学的關係等から導出
- 入出力データから，それを発生する数式を同定

同定法を適用する前提

入出力データがシステムのダイナミクスに関する情報を十分に含む。

そうならば，入出力データを解析・設計に直接使えるのではないか。

以下は，一つの考えの提案

## データに基づく予測制御

事前情報：線形，時不変，離散時間

もし，伝達関数で表すと，3次系，相対次数2（例）

伝達関数で表すと，

$$\frac{b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

入出力差分方程式で表すと，

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$
$$k = 0, 1, 2, \dots$$

⇕

$$[ y(k+3) \quad y(k+2) \quad y(k+1) \quad y(k) \quad u(k+1) \quad u(k) ]$$

と

$$[ 1 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad -b_1 \quad -b_0 ]$$

が直交

$$[y(k+3) \ y(k+2) \ y(k+1) \ y(k) \ u(k+1) \ u(k)]$$

と

$$[1 \ a_2 \ a_1 \ a_0 \ -b_1 \ -b_0]$$

が直交



6次元ベクトル

$$[y(k+3) \ y(k+2) \ y(k+1) \ y(k) \ u(k+1) \ u(k)]$$

の自由度は5次元に制限されている。

その5次元の空間を陽に知らなくても、  
5次元という情報とデータだけで、  
将来の振る舞いの予測が可能

目標値と予測値から、操作入力を決定する追従制御の提案

目標信号は任意関数

任意の目標信号 :  $y_r(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$

入出力データ :  $u(k-1), u(k-2), \dots, y(k-1), y(k-2), \dots$

操作入力  $u(k)$  の決定

入出力データ配列

$$\begin{array}{l} \dagger \\ \dagger\dagger \\ \dagger\dagger\dagger \end{array} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(8) & y(7) & y(6) & y(5) & u(6) & u(5) \\ y(9) & y(8) & y(7) & y(6) & u(7) & u(6) \\ y(10) & y(9) & y(8) & y(7) & u(8) & u(7) \\ y(11) & y(10) & y(9) & y(8) & u(9) & u(8) \\ y(12) & y(11) & y(10) & y(9) & u(10) & u(9) \\ y(13) & y(12) & y(11) & y(10) & u(11) & u(10) \\ y(14) & y(13) & y(12) & y(11) & u(12) & u(11) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

ランクは 5 以下

入力が十分にダイナミクスを励起しているものとして, 5 と仮定

例：時刻  $k = 9$  と  $k = 10$  の間に, 時刻  $k = 10$  で加える入力  $u(10)$  を計算

Row †  $y(9), y(8), y(7), u(8), u(7)$  : 既知  
 $y(10)$  : 未知, ランク条件を使って予測可能

Row ††  $y(9), y(8), u(9), u(8)$  : 既知  
 $y(10)$  : 予測済み  
 $y(11)$  : 未知, ランク条件を使って予測可能

Row †††  $y(9), u(9)$  : 既知  
 $y(11), y(10)$  : 予測済み  
 $y_r(12)$  : 指定  
 $u(10)$  : ランク条件を使って決定

データを更新することにより, ダイナミクスの変化に適応することも可能

## 例

システムを表す入出力差分方程式：

入力計算には不要，シミュレーションに必要

$$y(k+3) + 1.2y(k+2) + 0.27y(k+1) - 0.04y(k) = 0.6u(k+1) + 0.21u(k) \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

時刻  $k = 10$  から制御を開始

制御開始前の入出力データ

$$u(0) = 10, \quad u(1) = -2, \quad u(2) = 3, \quad u(3) = 0.5, \quad u(4) = 4$$

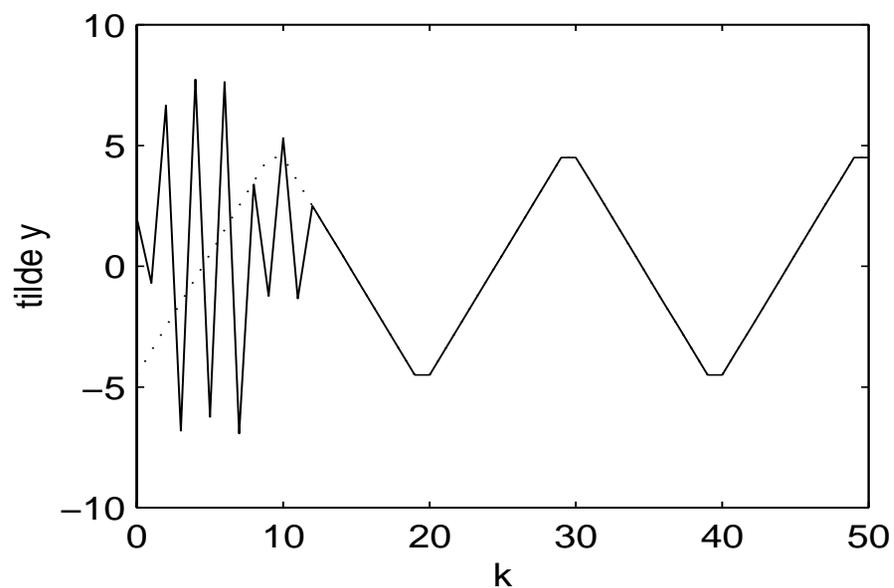
$$u(5) = -1, \quad u(6) = -4, \quad u(7) = 2.5, \quad u(8) = 7.5, \quad u(9) = 5$$

$$y(0) = 2.00, \quad y(1) = -0.70, \quad y(2) = 6.65, \quad y(3) = -6.81$$

$$y(4) = 7.73, \quad y(5) = -6.24, \quad y(6) = 7.63, \quad y(7) = -6.93$$

$$y(8) = 3.39, \quad y(9) = -1.23$$

## シミュレーション結果



破線：目標信号  $y_r(k)$  , 実線：制御出力  $y(k)$

仮定： ノイズなし

ノイズがある場合： 参考文献 [22],[23]

# データに基づく安定解析

## 従来の安定判別法

数式モデルに基づく方法： 伝達関数の極  
状態方程式の係数行列の固有値

振る舞いに注目する方法： リアプノフの方法

## リアプノフの方法

従来： 数式モデルを用いて適用

提案： データを用いて適用

## 対象システム

$$x(k+1) = Ax(k), \quad y(k) = cx(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x \in R^n : \text{状態}, \quad y \in R : \text{出力}$$

## 安定条件

すべての振る舞い  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して

$$x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) < 0$$

が成立する正定行列  $P$  が存在

従来は, 数式モデルを代入

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & x^T(k) \{ A^T P A - P \} x(k) < 0 \\ & \Updownarrow \\ & A^T P A - P < 0 \end{aligned}$$

本講演では, データの代入

$$x(k) = W^{-1} \begin{bmatrix} y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = Wx(k), \quad W = \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ \vdots \\ cA \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(k+n) \\ y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \end{bmatrix}^T \tilde{P} \begin{bmatrix} y(k+n) \\ y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix}^T \tilde{P} \begin{bmatrix} y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} < 0$$

$$\tilde{P} = (W^{-1})^T P W^{-1}$$

正定な  $P$  の存在  $\iff$  正定な  $\tilde{P}$  の存在

$$\begin{bmatrix} y(k+n) \\ y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix}^T \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{P} & 0 \\ \hline 0 & -\tilde{P} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} y(k+n) \\ y(k+n-1) \\ \vdots \\ y(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} < 0$$

すべての振る舞いに対して成立することを要求

## 振る舞いの自由度

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ &= c \left( A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I \right) x(k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  は  $A$  の特性多項式  $\det(zI - A)$  の係数

## $n + 1$ 次元ベクトル

$$Y_{[k, k+n]} \triangleq \begin{bmatrix} y(k+n) & y(k+n-1) & \cdots & y(k+1) & y(k) \end{bmatrix}^T$$

の自由度は  $n$

時刻  $k_1, \dots, k_n$  から始まる時系列を  $n$  本並べた  $(n+1) \times n$  行列

$$Y \triangleq \begin{bmatrix} Y_{[k_1, k_1+n]} & Y_{[k_2, k_2+n]} & \cdots & Y_{[k_n, k_n+n]} \end{bmatrix}$$

のランクが  $n$  ならば、この列の線形結合でシステムのすべての振る舞いを発生することができる。

## データに基づく安定条件

線形行列不等式 (LMI)

$$Y^T \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{P} & 0 \\ \hline 0 & -\tilde{P} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] Y < 0$$

が成立する正定行列  $\tilde{P}$  が存在することが安定性の**必要十分条件**

講演者らは、この条件をもとに安定化制御入力の発生方法を開発中

## 補足

以上の考えは、数式モデルを使わなくてもよいというだけで、数理的にシステムのダイナミクスを扱うという意味では、制御理論の立場そのものである。

## 6. おわりに

- 最近の制御理論の常識のようになっていることが，絶対的とは必ずしも限らない．
- 制御の原点に戻って，広い視野で，自分で枠組を考える姿勢が重要．
- 重要で興味ある問題がまだまだ多く存在する．すでに解かれている問題は，見方によっては，特別なものだけ．
- 本講演の4つのトピックスは，講演者らが研究しているもの．
- 既存の線形制御理論の世界に安住しないことを望む．